

KONTROL SİSTEMİ NOTLARI: GİRİŞ (1. KİTAP)

- *Modeller
- *Dinamik Tepki
- *Kutup ve Sıfır Değerleri
- *Zaman Bölgesi İçinde Başarım Ölçütü
- *Frekans Düzleminde Tepki
- *Kararlılık ve Frekans Düzlemi
- *Kök Yer Eğrisi Tekniği
- *Kontrol Sistem Dizaynı
- *Ayrık Zamanlı Sistemler
- *Z - Dönüşümü
- *Bilgisayar Kontrol Sistemleri
- *Sistem Durum Modelleri





1954

TMMOB
Elektrik Mühendisleri Odası

KONTROL SİSTEMLERİ NOTLARI

GİRİŞ (1.Kitap)

1.Baskı, Ankara-Aralık 2011

ISBN: 978-605-01-0246-8

EMO Yayın No: EK/2011/27

TMMOB Elektrik Mühendisleri Odası

İhlamur Sokak No:10 Kat:2 06640 Kızılay Ankara

Tel: (312) 425 32 72 Faks: (312) 417 38 18

<http://www.emo.org.tr> E-Posta: emo@emo.org.tr

Kütüphane Katalog Kartı

621.862 20 KON 2011

Kontrol Sistemleri Notları- Giriş (1. Kitap) Kitabı; Yayına Hazırlayan:
EMO Genel Merkez, --1.bs.--Ankara. Elektrik Mühendisleri Odası, 2011

344 s.:24 cm (EMO Yayın No:EK/2911/27; ISBN:978-605-01-0246-8)

Kontrol Sistemleri

Dizgi

TMMOB Elektrik Mühendisleri Odası

Baskı

TMMOB Elektrik Mühendisleri Odası

KONTROL SİSTEMLERİ NOTLARI – GİRİŞ (1.Kitap)

BAŞLARKEN

Kontrol sistemleri ve otomasyona dönük bu notlar, öncelikle W.Bolton'un "Newnes Control Engineers Pocket Book (*Türkçesi Kontrol Mühendisi Cep Kitabı* adıyla Bileşim Yayınları tarafından 2004 yılında basılmıştır)" kitabı; A.Parr'ın "Industrial Control Handbook (*Türkçesi Endüstriyel Kontrol El Kitabı* adıyla 1994 yılında MEB Yayınları tarafından basılmıştır)" ve C.Dorf'un "Modern Control Systems" kitapları ile IDC tarafından hazırlanan Practical Control Systems for Engineers ile yine IDC'nin hazırladığı "Practical Distributed Control Systems for Engineers (*aynı notların Türkçesi Dağıtılmış Kontrol Sistemleri* ismiyle daha önce Bileşim Yayınları tarafından basılmıştı) ve Practical Networks Automation and Communication (*bu notlar da daha önce Bileşim Yayınları tarafından Elektrik Şebeke Otomasyonu* ismiyle *Türkçeleştirilmişti*)" isimli uygulamalı atölye eğitimlerinden hazırlanan kurs notlarından yararlanılarak bir araya getirilmiştir. Kontrol sistemleri ve otomasyonla ilgili derlenen notların toplamı 1500 sayfaya yakındır. Toplamı şimdilik dört kısım olarak yayımlanması uygun görülmüştür. Notların ilk kısmı (1.kitap –Kontrol Sistemleri Notları Giriş), kontrol teorisi üzerinedir ve kontrol üstüne daha ziyade genel bilgiler verilmektedir, toplamı 340 sayfadır. 2. kitap elektrik enerji sistemlerinin otomasyonu üzerine giriş niteliğindedir ve toplamı 230 sayfadır. 3 ve 4. Kitaplar (Dağıtılmış Kontrol Sistemleri 1 ve 2) toplamı 800 sayfaya yakındır ve 320 sayfalık ilk kısımda, SCADA ve PLC sistemleri ile DCS karşılaştırması, kontrolör ile ilgili temel bilgiler ve kontrolör konfigürasyonu, DCS iletişim sistemleri ve LAN yapısı, profibus ve foundation fieldbus ile ilgili bilgiler verilmektedir. Son kitapta (Dağıtılmış Kontrol Sistemleri 2) ise DCS Sistemlerinin programlanması, Alarm sistemi yönetimi, DCS Raporlamaları, Bakım ile ilgili yapılacaklar ve detaylı bir DCS uygulama örneği anlatılmaktadır ve toplamı 500 sayfaya yakındır.

Giriş niteliğindeki kontrol sistemleri üzerine ilk kitap olan bu notlarla amaçlanan

- kontrol mühendisliğinin temel prensipleri üzerine, özlü ve kolay okunabilir bir tanım olmasının ötesinde;

1. temel sistemlerin modellerini geliştirmek,
2. giriş sinyallerine ilişkin sistemlerin tepkilerini belirlemek,
3. sistemleri; transfer fonksiyonları, blok modelleri ve sinyal akış grafikleri yoluyla tanımlamak,
4. sistemlerin kutup ve sıfır analizini gerçekleştirmek,
5. sistemlerin kararlılığını belirlemek,
6. kararlı-hal hatalarını belirlemek,
7. sistemlerin frekans tepkisini belirlemek,
8. Bode çizimini kullanmak,
9. Nyquist kararlılık kriterini kullanmak,
10. sistemleri analiz etmekte kk eğrilerini kullanmak,
11. Kontrol birim ve kompensatör dizaynı,
12. ayrıık zamanlı sinyal işleme prensiplerini tanımlamak,
13. ayrıık zamanlı sistemlerinin tepkilerini, kararlılıklarını ve kararlı-hal hatalarını
14. belirlemede z-dönüşümünü kullanmak,
15. dijital kontrol birim tasarımıyı yapmak,
16. mikro-işlemci kontrollü sistemlerin ve PLC nitelerinin prensiplerini tanımlamak,
17. sistemlerde sistem hal modelleri kullanmak üzere,
 - kontrol mühendisliği için gerekli matematik prensipleri sağlamaya yönelik araçları sağlamaktır.

Bu notlar, hem kalıcı/sürekli, hem de ayrıık zamanlı kontrol sistemlerini kapsamaktadır.

Hitap ettiği kesimler:

- kontrol sistemlerinin temel prensiplerine gereksinim duyan öğrencilerin yanı sıra;
- Endüstriyel alanda, kontrol mühendisliği üzerine bir kaynağa gereksinim duyan mühendis ve tüm teknik adamlardır.

Notların içeriğine gelince: notlar, kontrol sistemlerinin amaçları ile başlamakta, ardından mekanik, elektronik yada akışkanlar gibi sistem modelleriyle, dinamik tepkiler konu edilmekte; 3. Bölüm, kutuplar; ardından gelen 4. ve 5. Bölümlerde zaman sınırlı performans ltleri ve frekans sınırlı tepkiler yer almakta; stabilite yada göreceli stabilitenin konu edildiği 6. Bölümden sonra; Locus Kök yöntemi, kontrol sistemleri tasarımları 7 ve 8. Bölümler olarak anlatılmakta. Ayrıık zaman sistemleri, Z-transform sistemleri içinde zaman geciktirmeleri vb... 9 ve 10. Bölümlerde açıklanırken; 11 ve

12. Bölümler ise bilgisayarlı kontrol sistemleri ile durum sistemli modeller üzerinedir.

Kontrol Sistemleri üzerine farklı kaynaklardan birleştirilen bu notları, EMO kanalıyla, bu kez e-kitap olarak sunuyoruz, bu e-kitaplara katkılarından dolayı, EMO yayınları ile uğraşan başta Sn. Emre Metin, Sn.Hakkı Ünlü ve Sn.Orhan Örücu olmak üzere tüm EMO yetkililerine teşekkür ederiz.

Aydın Bodur

KONTROL SİSTEMLERİ NOTLARI –GİRİŞ (1.KİTAP)	1
GİRİŞ.....	10
Kontrol sistemlerinin amaçları	10
Açık ve kapalı döngü sistemleri	10
Geri beslemenin etkileri.....	13
Ayrık verili kontrol sistemleri	15
Sıralı kontrol.....	16
1. MODELLER.....	17
Modeller	17
Mekanik sistemler	19
Elektrik sistemleri	24
Akışkan sistemleri	30
Termal sistemler.....	36
Diferansiyel bağıntılar	38
2. DİNAMİK TEPKİ.....	42
Geçici ve kararlı hâl tepkileri.....	42
Transfer fonksiyonu.....	49
Laplace dönüşümü.....	50
Laplace dönüşümü kullanarak belirlenen tepki	62
Sistemlerin blok diyagram gösterimi	65
Sinyal-akış grafikleri	76

3. KUTUP VE SIFIR DEĞERLERİ	85
Kutup ve sıfır değerleri	85
Kutup konumu ve geçici tepki	87
Standart sistemler	92
Routh-Hurwitz kriteri.....	96
 4. ZAMAN BÖLGESİ İÇİNDE BAŞARIM ÖLÇÜTÜ	 104
Kararlı-hâl hatası	104
Kontrol sistemleri için geçici tepkiler.....	112
Performans endeksleri.....	117
 5. FREKANS DÜZLEMİNDE TEPKİ	 121
Frekans tepkisi	121
Birinci-derece sistemler için frekans tepkisi.....	127
İkinci-derece sistemler için frekans tepkisi	129
Kapalı-döngü bir sistem için frekans tepkisi.....	133
Frekans düzlemi başarımlarını spesifikasyonları	134
Frekans tepkisinin grafiksel belirlenmesi.....	136
Bode çizimleri.....	138
Transfer fonksiyonlarının deneysel belirlenmesi	150
Zaman gecikmesi	152
 6. KARARLILIK VE FREKANS DÜZLEMİ.....	 153
Kararlılık.....	153
Polar Çizim	155

Basitleştirilmiş Nyquist kararlılık kriteri.....	158
Nyquist kararlılığı ve s-düzlemi	164
Görelî kararlılık.....	169
Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılığı	172
Sabit M-yer eğrileri.....	173
Sabit N-yer eğrileri.....	175
Nichols grafikleri	177
7. KÖK YER EĞRİSİ TEKNİĞİ	180
Kök yer eğrileri	180
Kök yer eğrilerini oluşturmak için kurallar	186
Kök yer eğrileri örnekleri	192
Zaman gecikmesi	196
Kök yer eğrilerini kullanarak çözümleme.....	198
Kök eğrisi ve zaman düzlemi arasındaki ilişki.....	200
8. KONTOL SİSTEM DİZAYNI	203
Kompansatörler ve kontrolörler birimleri.....	203
Kontrol modları	204
Kontrolör kazançlarının ayarlanması	216
Kompanzasyon	219
Hız geri beslemesi.....	237
9. AYRIK ZAMANLI SİSTEMLER	239
Sistemler	239

Dijital sinyal işleme.....	243
Türev ve integral yakınsamaları	249
Örnekleme teoremi	253
Sıfır-derece tutulum	255
10. Z-DÖNÜŞÜMÜ	258
Zaman gecikmesi	258
Z-dönüşümünün örnekleme	260
Z-dönüşümünün özellikleri	265
Ters z-dönüşümü	268
Darbe transfer fonksiyonu	270
z-düzlemi.....	277
s-düzlemi ile z-düzlemi arasındaki ilişki	285
z-bölgesinde kararlılık testleri	289
Ayrık zamanlı sistemlerin kararlı hal hataları.....	293
Ayrık zamanlı bir sistemin frekans tepkisi	296
11.BİLGİSAYAR KONTROL SİSTEMLERİ	298
Bilgisayar kontrolü.....	298
Dijital kontrolör tasarımı	302
Ayrık kontrolör transfer fonksiyonlarının programa çevrilmesi	306
Örnekleme aralığının seçimi.....	309
Kontrol döngüsündeki mikroişlemci.....	311
12. SİSTEM DURUM MODELLERİ	318

Matris notasyon ve terminolojisi	318
Durum uzayı modeli	319
Matris aritmetiği	323
Determinantlar.....	328
Durum denklemlerinin çözümü.....	336
Durum diyagramları.....	340

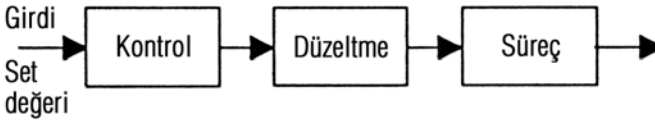
GİRİŞ

Kontrol sistemlerinin amaçları

- 1 Süreçlerin çıkışlarını, istenen sabit bir değerde denetim altına almak.
- 2 Süreçlerin çıkışlarının belirli bir değişim formunu takip etmesini sağlamak.
- 3 Olayların belirli bir sıra dahilinde oluşmasını sağlamak. Bu, özel zamanlarda meydana gelen zaman tahrikli/sürürlü olayların sırası olabilir veya doğrudan olay tahrikli/sürürlü olabilir. Böylelikle olaylar, özel koşullar gerçekleştiğinde meydana gelir.

Açık ve kapalı döngü sistemleri

Açık döngü kontrol sistemi terimi, istenilen sonucu verecek biçimde, bir önceki verinin baz alınarak, sisteme girilecek girdinin seçilebildiği sistemler için kullanılır. Şekil 1, böyle bir sistemin temel formunu gösteriyor.



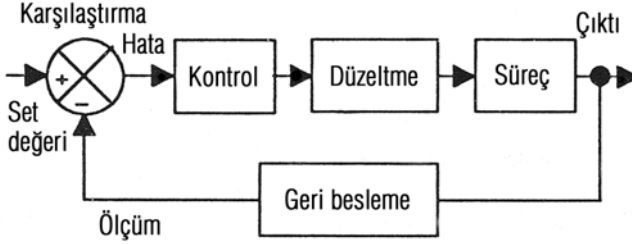
Şekil G.1 *Açık döngü bir kontrol sisteminin temel elemanları*

Sistem, üç temel elemana sahiptir: 1- kontrol, 2- düzeltme ve 3- (değişkenin kontrol edildiği) süreç.

- 1 Kontrol elemanı, sisteme girilen verinin (girdinin) sonucuna göre yapılacak müdahaleyi gösterir.
- 2 Düzeltme elemanı, kontrolör çıktısını, yeni girdi olarak alır ve kontrol edilen değişkeni değiştirmek üzere tasarlanmış olaylar dizisinin sonucunu çıktı olarak verir.
- 3 Değişkenin kontrol edildiği süreci gösterir.

Çıkış değişkenini değiştiren dış etkiler için, kontrol faaliyetlerinin değişimi yoktur.

Kapalı döngü kontrol sistemi terimi, kontrol edilen değişkenin geri beslendiği sistemler için kullanılır; bu nedenle sistemin girdisi, istenilen çıktıya ulaşmak için yeniden düzenlenebilir. Şekil 2 böyle bir sistemin temel formunu göstermektedir.



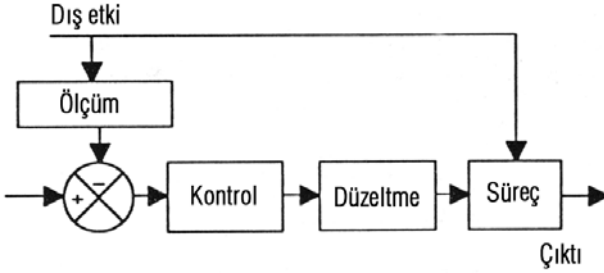
Şekil G.2 kapalı döngü bir kontrol sisteminin temel elemanları

Böylesi bir geri besleme sistemi, beş temel elemana sahiptir: 1- karşılaştırma, 2- kontrol, 3- düzeltme, 4- ölçülen değer geri beslenmesi ve 5- bir değişkenin kontrol edildiği süreç.

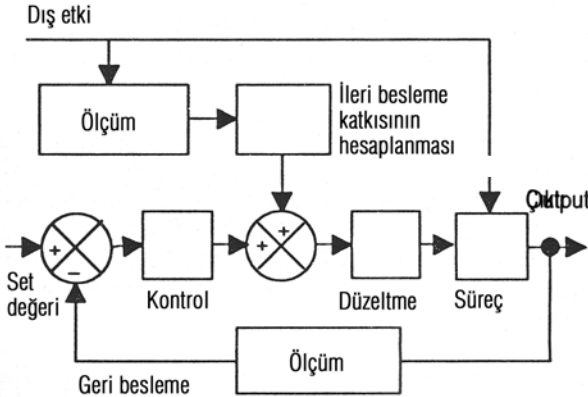
- 1 Karşılaştırma elemanı, olması gereken değerle gerçek değer arasında karşılaştırma yapar ve hata sinyali, kontrol elemanına girdi olarak gönderilir. Bu elemanın girdilerinin '+' ve '-' işaretleri, baştan ayarlanmış değerinden geri besleme değerinin çıkarıldığını gösterir.
- 2 Kontrol elemanı, sisteme veri girişinden sonra yapılacak müdahaleyi belirler.
- 3 Düzeltme elemanı, kontrolör için üretilen çıktıyı, bu kez girdi olarak alır ve kontrol edilen değişkeni değiştirmek üzere önceden tasarlanmış olaylar dizisinin sonucunu yeni çıktı olarak verir.

- 4 Gerçekte oluşan değişkenin değerini ölçmek için başvurulmuş ve ölçülen değer, önceden ayarlanmış değeriyle karşılaştırmak üzere geri besleme amacıyla kullanılan bir ölçü elemanı vardır.
- 5 Bir değişkenin kontrol edildiği sürecin kendisidir.

Bir başka kapalı döngü kontrolü formu *ileri beslemeyi* kapsar (Şekil 1.3). Bazı dış etkilerin sonucu kontrol edilen bazı süreç değişkenlerinde değişimler ortaya çıkar. Dış etkileri gözlemleme ve bu verileri kontrol sistemine geri beslemesi sağlanarak, sistemin değişimlere, geri besleme sistemlerinin kendisinden daha hızlı tepki vermesi sağlanabilir. İleri besleme, çıktıyı sadece özel bir tip dış etkiye karşı düzeltebilir ve genellikle gerekli kontrolün elde edilmesi için geri beslemeyle birlikte kullanılır (Şekil 4).



Şekil G.3 İleri besleme



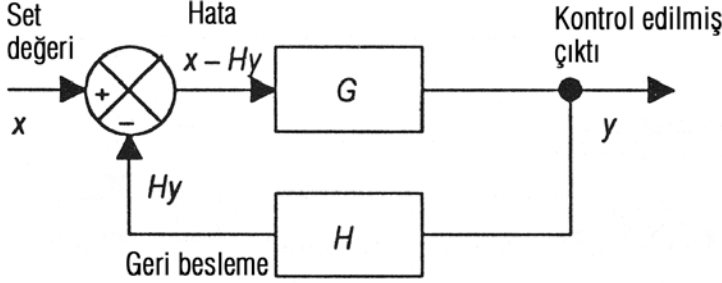
Şekil G.4 İleri besleme ile birlikte geri besleme

Geri beslemenin etkileri

Bir sistemde *geri beslemeye* başvurmak suretiyle:

- 1 Sistemin, değişkeni kontrol etmesine olanak veririz; bu sayede gerçek değerle önceden ayarlanmış değer arasındaki fark (hata) azaltılır.
- 2 Sistemin, toplam kazancını değiştirebiliriz. Kararlı-hal koşulları altında, statik kazanç “çıkıtı/girdi”dir. Statik kazancı G olan bir sisteme, kazancı H olan bir geri besleme sistemini bağlamak (Şekil 5), ileri elemanın e hatası taşıyan bir girdiye, y tepkisi taşıyan bir çıktıya sahip olduğu ve böylece kazancın $G = y/e$ olduğu anlamına gelir. Fakat hata, set değeri x ve geri beslenen değer Hy arasındaki farktır. Böylece $G = y/(x-Hy)$ 'dir ve bu nedenle sistemin toplam kazancı, yani y/x :

$$\text{toplam kazanç} = \frac{G}{1+GH} \quad [1]$$



Şekil G.5 Negatif geri beslemeli sistem

- 3 Sistemin kararlılığını değiştirebiliriz. Eğer bir sistemin, sınırlanmış kimi girdileri sonucunda çıktıları, sınırsız biçimde artıyorsa; bu sistem kararsızdır. Denklem [1] yoluyla, $GH = -1$ ise sistemin çıktısı: her hangi sonlu bir girdi için, her zaman sonsuzdur ve sistem kararsızdır. Böylece geri besleme ilk başta kararlı olan bir sistemi kararsız hale getirir.
- 4 Sistemin bant genişliğini değiştirebiliriz. Bir sistemin bant genişliği, girdilerinde sistemin tatmin edici tepki verdiği frekans

aralığıdır. İleri (forward) kazanç G ve geri besleme kazancı H , frekansa bağlı fonksiyonlar olduğundan; toplam kazançta frekansa bağlı fonksiyon olacaktır ve sistemin kararlılığı, frekansa bağlı kalacaktır.

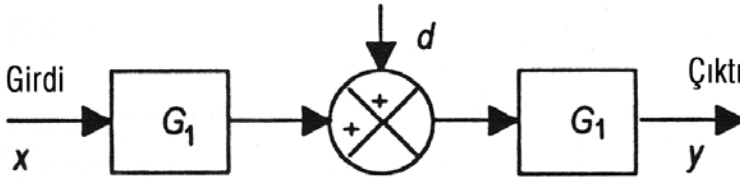
- 5 Sistem kazancının duyarlılığını değiştirebiliriz. Bir sistemin duyarlılığı: toplam sistem kazancının, sistem elemanlarının kazanç değişimlerinden hangi miktarda etkilendiğinin ölçüsüdür. Böylece sistemin ileri eleman kazancının değişimlerine karşı duyarlılığı, toplam sistem kazancı olan G_c 'nin değişiminin, ileri eleman kazancı G 'nin, değişimine oranıdır; $(\Delta G_c / G_c) / (\Delta G / G)$ gibi. ΔG miktarı, ileri eleman kazanç değişimi sonucunda toplam sistem kazanç değişimi ΔG_c kadar olur. Duyarlılık şu şekilde yazılabilir:

$(\Delta G_c / \Delta G)(G / G_c)$. Denklem [1]'in türevi, $dG_c / dG = 1 / (1 + GH)^2$ olduğundan, duyarlılığı şöyle yazabiliriz:

$$\text{duyarlılık} = \frac{1}{1 + GH} \quad [2]$$

- 6 Dış etkenlerin etkilerini (mesela sistemdeki gürültü gibi) değiştirebiliriz. Şekil 6'daki, iki elemanlı açık döngü sistemine, dış etkenin iki eleman arasından girdiği durumu ele alalım. Sisteme verilen bir x girdisi için, ilk eleman $G_1 x$ çıktısını versin. Bu değere, ikinci elemanın girdisini elde etmek için dış etken d eklenir, $G_1 x + d$. Bu nedenle sistemin toplam çıktısı şu hale gelecektir.

$$y = G_2(G_1 x + d) = G_1 G_2 x + G_1 d \quad [3]$$



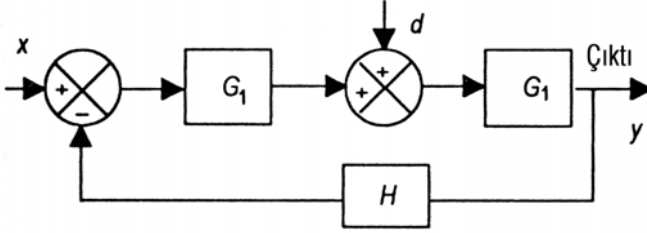
Şekil 1.6 Açık döngü bir sistemde dış etken

Sinyal-gürültü oranı: sinyale bağlı çıktının gürültüye bağlı çıktıya oranıdır ve dolayısıyla, $G_1G_2x/G_2d = G_1x/d$ 'dir.

Geri beslemeli sistem için (Şekil 1.7), ilk ileri eleman girdisi $(x-Hy)$ 'dir ve bu nedenle bu elemanın çıkışı $G_1(x-Hy)$ 'dir. G_2 'nin girdisi $G_1(x-Hy)+d$ 'dir ve bu nedenle G_2 'nin çıkışı $x = G_2[G_1(x-Hy)+d]$ 'dir. Bunu tekrar düzenleyerek:

$$c = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}x + \frac{G_2}{1+G_1G_2H}d \quad [4]$$

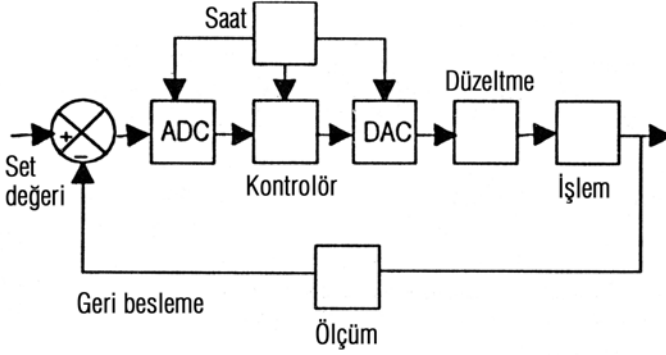
elde edilir ve bu denklem [3] ile karşılaştırıldığında, dış etkenin etkisinin, $(1+G_1G_2H)$ çarpanı kadar azaldığı gözlenir. Sinyal-gürültü oranı G_2x/n 'dir ve geri beslemenin olmadığı durumda da aynıdır.



Şekil G.7 Kapalı döngü sistemlerde dış etki

Ayrık verili kontrol sistemleri

Sürekli veri kontrol sistemleri, sinyallerin tamamının sürekli zaman fonksiyonlarından oluştuğu sistemlere denir. Ayrık veri kontrol sistemi ise, sistemdeki bir veya daha fazla noktanın darbe dizisi ya da katarı veya sayısal/dijital kod şeklinde olması yönüyle farklıdır. Böyle bir sistemin, örnekleme veri formu, sürekli bir zaman fonksiyonu sinyal girdisine sahiptir ve bu girdi: örnekleme yoluyla bir ayrık veri sinyaline dönüştürülür. Şekil G.8 böyle bir sistemin temel şeklini göstermektedir. Örnekleme analog-sayısal dönüştürücü yardımıyla yapılabilir ve sayısal-analog dönüştürücü yardımıyla tekrar sürekli bir zaman sinyaline dönüştürülmeden önce, hata sinyalini işlemek için dijital bir kontrolör kullanılır.

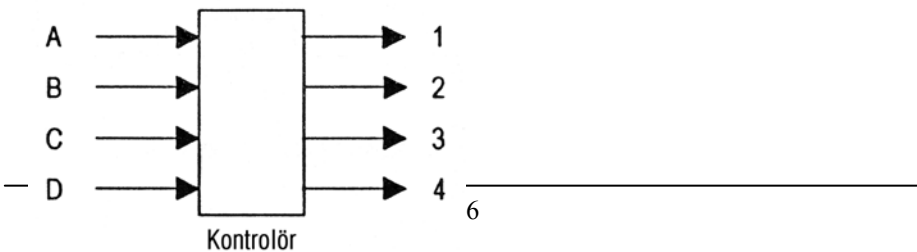


Şekil G.8 Örneklem verili kapalı döngü kontrol sistemi

Sıralı kontrol

Sıralı bir kontrol sistemi, önceden belirlenmiş bir takım operasyonları sırayla gerçekleştiren sistemdir. *Olay-sürüşlü (olay tahrikli)* terimi, operasyonların başlatılması veya bir olay gerçekleştiğinde sona erdirilmesini belirten bir terim olarak kullanılır. Zaman sürümlü terimi, operasyonların özel bir zaman veya bir zaman aralığından sonra başlatılıp sona erdirilmesini belirten bir tabirdir.

Şekil 1.9 böyle bir sistemi resmediyor. *A* olayı gerçekleştiğinde, kontrolöre, 1.çıkıyı ileten bir girdi vardır; aynı şekilde *B* olayı gerçekleştiğinde de kontrolöre 2.çıkıyı veren bir başka girdi vardır... Bu tipte bir sistem, mikroişlemcilerin kontrolör olarak kullanılması sonucu, giderek yaygınlaşmaya başlamıştır.



1. MODELLER

Şekil G.9 Sıralı kontrol

Modeller

Bir sistemin matematiksel modeli, o sistemin matematiksel denklemler ile tanımlanmasıdır. Bu tip denklemlerin temeli, Newton kanunları ve Kirchhoff kanunları gibi, fizik kanunlarıdır. Bu tarzda bir model geliştirmek için kullanılabilecek bir yöntem: sistemi, parçalarına ayırmak ve her bir elemanı temel yapıtaş bir blok halinde tanımlamakla mümkündür.

Lineerlik/Doğrusallık

Matematiksel modeller, lineer veya lineer olmayan modeller olabilir. Lineer bir modelde *üst üste bindirme prensibi* uygulanabilir:

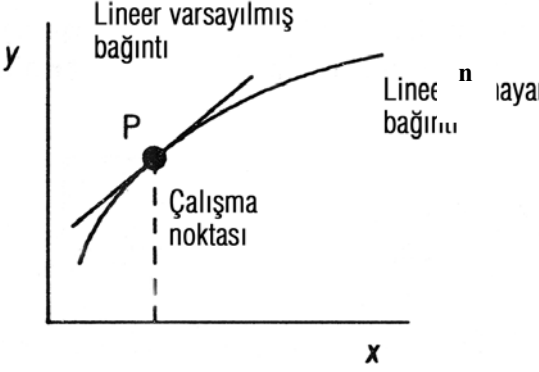
- 1 Aynı anda uygulanan birden çok girdiye verilen tepki, her bir girdinin ayrı ayrı uygulandığında verilen tepkileri toplamına eşittir.
- 2 Herhangi bir girdi sabit bir sayıyla çarpıldığında; çıktı da, aynı sayıyla çarpılmış sayılır.

Örnek olarak, lineer mekanik bir sisteme aynı anda uygulanan 1 N ve 3N büyüklüğünde iki kuvvet varsa; elde edilen toplam yer değiştirme, 1 N ve 3 N kuvvetlerinin ayrı ayrı uygulandığında oluşacak yer değiştirmeleri toplamı kadar olacaktır. Eğer 2 N'luk (2 Newtonluk) bir kuvvet, lineer bir mekanik sisteme uygulanmışsa; bu kuvvetin üç katı (yani 6 N büyüklüğünde bir kuvvet), 2 N'luk kuvvetin neden olduğu yer değiştirmenin (uzaklık yada deplasman) 3 katı kadar bir yer değiştirmeye neden olacaktır.

Lineerleştirme

Gerçek bileşenler arasında mükemmel lineer bileşenler çok nadirdir; çoğu zaman bazı çalışma noktaları civarında lineer olduğu varsayılan bir dizi operasyon vardır. Lineer olmayan bileşenler için, bir çalışma noktası civarında, lineer bir bağıntı olduğunu varsaymak

makuldür; bu da genelde, o çalışma noktasındaki lineer olmayan bağıntının tanjantına karşılık gelir(Şekil 1.1).



Şekil 1.1 lineer varsayılmış bağıntı

Eğer P noktası grafiğin yeni orijini olarak alınırsa; P noktasındaki tanjant, m gradyanı olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\Delta y = m \Delta x \quad [1]$$

Bu tarz bir lineerizasyona örnek olarak, kesit alanı A , basıncı p olan bir musluktan, ρ özkütleli bir sıvının, q akış hızı bağıntısını ele alalım.

$$q = C_d A \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \quad [2]$$

C_d sabittir. Sabit bir kesit alanı ve özkütle için denklem şu şekilde yazılabilir:

$$q = C \sqrt{p} \quad [3]$$

Bu q ve p arasında lineer olmayan bir bağıntı. Bu bağıntıyı bir çalışma basıncı civarında lineerleştirebiliriz. Denklem [3]'ün gradyanı türev alma yoluyla elde edilebilir ve aşağıdaki gibidir:

$$m = \frac{dq}{dp} = \frac{C}{2\sqrt{p}} \quad [4]$$

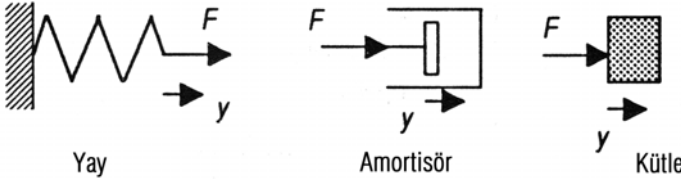
Çalışma noktasında, $m_o = C2\sqrt{p_o}$ ve lineer bağıntı olarak aşağıdakini kullanabiliriz:

$$\Delta q = m_o \Delta p \quad [5]$$

Kontrol sistemleri için matematik modelleri geliştirmede, çalışma noktasındaki değişiklikler, nispeten küçük olduğundan ve böylesi denklemlerin kullanımıyla elde edilen bir model, sistemi makul biçimde açıklayabildiğinden, genelde böyle lineerleştirilmiş denklemler kullanabiliriz.

Mekanik sistemler

Mekanik sistemlerin temel yapı blokları, kütle, yay ve amortisör elemanlarıyla gösterilir (Şekil 1.2). Girdi F 'tir ve çıktı yer değiştirme y 'dir.



Şekil 1.2 mekanik sistem yapı blokları

- 1 Lineer bir yay için, uzama miktarı y , uygulanan uzatma kuvvetiyle doğru orantılıdır ve aşağıdaki gibidir:

$$F = ky \quad [6]$$

k *esneklik katsayısı* olarak adlandırılır. Yay, bir sistemin ‘esnekliği’ni veya ‘elastikiyeti’ni ifade eder.

- 2 Bir *amortisör*, bir silindir içindeki sıvı dolu bir ortamda hareket eden bir piston şeklinde düşünülebilir. Pistonun hareketi, akışkanın pistonun kenarlarından akmasını gerektirir. Üstesinden

gelinmesi gereken direnç kuvveti, pistonun hızıyla doğru orantılıdır ki: bu da zaman birimde yer değiştirme x' 'tir, yani dy/dt . Sonuç olarak:

$$F = c \frac{dy}{dt} \quad [7]$$

Amortisör sistemin sönümlemesini ifade eder.

- 3 Bir *kütle* için, uygulanan kuvvet ve ivme arasındaki bağıntıyı, Newton'un ikinci kanunu, $F = m \times a$ verir; fakat ivme, hızın zamana bağlı türevi, hız da yer değiştirmenin zamana bağlı türevidir. Sonuç olarak:

$$F = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad [8]$$

kütle bir sistemin 'eylemsizliği'ni ifade eder.

Yayı uzatmak, pistonu amortisör içinde hareket ettirmek ve kütleyi ivmelendirmek için enerjiye ihtiyaç vardır. Yay uzatıldığı zaman depoladığı enerjiyi veren bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$E = \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k} \quad [9]$$

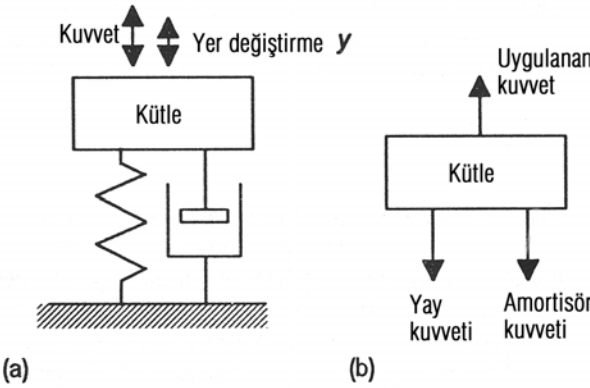
ve bu enerjiyi kendi orijinal boyuna döndüğünde serbest bırakır. Bir kütle, v hızıyla hareket ederken içinde depolanan enerji, hareket (kinetik) enerjisidir ve hareket etmesi durduğunda bu enerjiyi serbest bırakır; bu enerji aşağıdaki gibidir:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 \quad [10]$$

Buna rağmen amortisör, uygulanan kuvvet kaldırıldığında, ilk orijinal konumuna dönemez ve bu nedenle enerji depolamaz bunun yerine enerji, pistonun hareketi esnasında harcanır. Amortisörün harcadığı enerjinin zamana bağlı değişimi, yani kuvveti P , hıza bağlıdır ve aşağıdaki gibidir:

$$P = cv^2 \quad [11]$$

Bu yapı bloklarını, bir sistemi gösterirken nasıl kullandığımıza bir örnek olarak, Şekil 1.3'te verilen sistemi ele alalım. Bu, yere monte edilmiş ve titreşim kuvvetlerine tabii kalmış bir makineyi resmediyor olabilir. Sistem modelini elde etmek için, bağımsız gövde diyagramını çizeriz; bunlar her kütlenin üzerine etki eden dış kuvveti gösteren kütle diyagramlarıdır. Elimizdeki sistem için bir tane kütle var; bu yüzden de bir tane *bağımsız gövde diyagramımız* var.



Şekil 1.3 (a) Sistem, (b) bağımsız gövde diyagramı

Bağımsız gövde diyagramının gösterdiği gibi, kütle üzerine etki eden net kuvvet: uygulanan kuvvetle yay ve amortisör tarafından uygulanan çekme kuvvetinin farkı kadardır. Bu durumda, Newton'un ikinci kanunun uygulanması ile aşağıdaki bağıntı elde edilir:

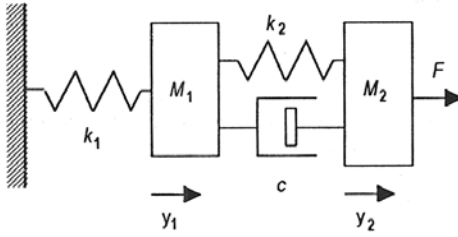
$$F - ky - c \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad [12]$$

Bir başka örnek olarak, Şekil 1.4 (a)'da gösterilen sistemi ele alalım. Bu iki kütleye sahip ve bu nedenle iki bağımsız gövde diyagramı çizeriz (Şekil 1.4(b)). k_1 elastikiyetine sahip yay y_1 kadar uzatılmış ve k_2 elastikiyetine sahip yay $y_1 - y_2$ kadar uzatılmıştır. M_1 kütlesi için çizilen bağımsız gövde aşağıdaki bağıntıyı verir:

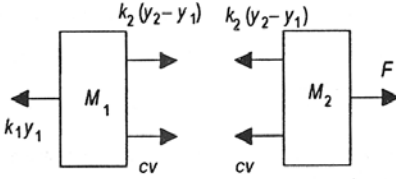
$$k_2(y_2 - y_1) - c\left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt}\right) - k_1 y_1 = m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \quad [13]$$

M_2 kütlesi için çizilen bağımsız gövde aşağıdaki bağıntıyı verir:

$$F - k_2(y_2 - y_1) - c\left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt}\right) = m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \quad [14]$$



(a)



(b)

Şekil 1.4 Mekanik sistem

Dönüştürülebilir sistemler

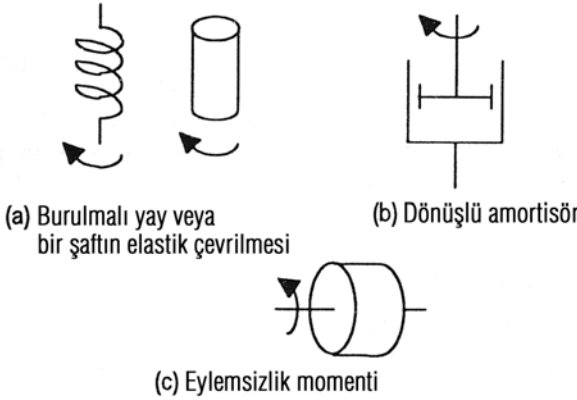
Dönüştürülebilir sistemler için temel yapı blokları burulma yayı, döner amortisör ve eylemsizlik momentidir (Şekil 1.5).

- 1 Bir burulma yayı için, dönme açısı θ , torkla doğru orantılıdır:

$$T = k\theta \quad [15]$$

- 2 Dönüştü bir amortisör için, yani bir akışkan içinde etkili biçimde dönen bir disk için, direnç torku T , açısal hız ω ile doğru orantılıdır ve böylece:

$$T = c\omega = c \frac{d\theta}{dt} \quad [16]$$



Şekil 1.5 Dönüştü sistem elemanları

- 3 Eylemsizlik momenti I olan bir bloğa T torku uygulanması, a açısal ivmesine neden olur ve açısal ivme, açısal hızın zamana bağlı değişimi olduğundan:

$$T = Ia = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad [17]$$

Bir θ açısıyla çevrilen bir burulmalı yayda depolanan E enerji bağıntısı aşağıdaki gibidir:

$$E = \frac{1}{2} k \theta^2 = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k} \quad [18]$$

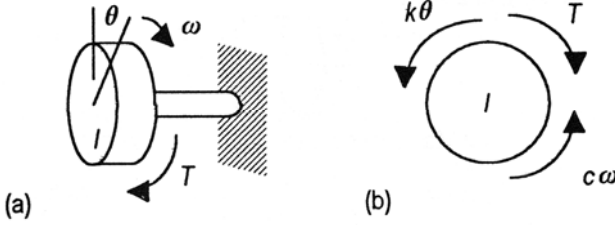
Bir ω açısal hızıyla dönen bir kütlede depo edilen enerji, kinetik enerjidir:

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad [19]$$

Döner amortisör, enerji depolamaz; sadece enerji harcar. Bir ω açısal hızıyla dönen bir döner amortisör için harcanan P kuvveti, aşağıdaki gibidir:

$$P = c\omega^2 \quad [20]$$

Bir sistem modeli geliştirmeye örnek olarak, Şekil 1.6(a)'da gösterilen sistemi ve bu sistemin Şekil 1.6(b)'de gösterilen serbest gövde diyagramını ele alalım.



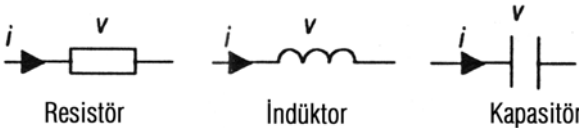
Şekil 1.6 Dönüştürülebilir sistem

Diske etki eden torklar, uygulanan T torku, $k\theta$ yay torku ve $c\omega$ amortisman torku'dur. Bu nedenle:

$$T - k\theta - c\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad [21]$$

Elektrik sistemleri

Elektrik sistemlerinin temel yapı blokları, resistör (direnç), indüktör ve kapasitördür (Şekil 1.7).



Şekil 1.7 *Elektrik sistemi yapı blokları*

- 1 Üzerinde i akımı olan bir direncin v potansiyel gerilimi, R direnci olmak üzere, aşağıda verildiği gibidir:

$$v = Ri \quad [22]$$

- 2 Bir indüktör için, herhangi bir anda üzerindeki v potansiyel gerilimi, L indüktansı olmak üzere, akımın zamana göre değişimine bağlıdır:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad [23]$$

Potansiyel gerilimin yönü, indüktör üzerinde akım oluşmasını sağlayan sürücü gerilimin ters yönündedir. Bu denklem şu şekilde de yazılabilir:

$$i = \frac{1}{L} \int v dt \quad [24]$$

- 3 Bir *kapasitör* için, üzerindeki potansiyel gerilimi v , C kapasitansı olmak üzere, $V=q/C$ bağıntısıyla kapasitör plakaları arasındaki yüke bağlıdır. Akım yüklerin hareketinin zamana göre değişimi olduğundan:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{C} i \rightarrow i = C \frac{dv}{dt} \quad [25]$$

Bu denklem, şu şekilde de yazılabilir:

$$v = \frac{1}{C} \int i dt \quad [26]$$

Üzerinde i akımı olan bir indüktörde depolanan enerji E aşağıdaki gibidir:

$$E = \frac{1}{2} Li^2 \quad [27]$$

Üzerinde v potansiyel gerilimi olan bir kapasitörde depolanan enerji E aşağıdaki gibidir:

$$E = \frac{1}{2} C v^2 \quad [28]$$

Bir direnç/resistör enerji depolamaz, sadece harcar. Üzerinde v potansiyel gerilimi olan bir resistör için harcanan P kuvveti aşağıdaki gibidir:

$$P = iv = \frac{v^2}{R} \quad [29]$$

Elektrik devreleri modelleri geliştirmek için iki devre kanununa ihtiyacımız var:

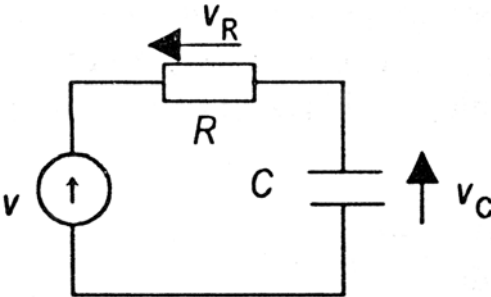
1 *Kirchoff'un akım kanunu*

Herhangi bir devreye (ekleme) giren toplam akım, o eklemden çıkan akım toplamına eşittir; yani bir eklemdaki akımların cebirsel toplamı sıfırdır.

2 *Kirchoff'un voltaj kanunu*

Döngü (loop) olarak adlandırılan kapalı bir hat boyunca, döngüyü oluşturan elemanların üzerindeki voltajların cebirsel toplamı sıfırdır. Bu, e.m.f. (elektromotor kuvvet) kaynağı içeren bir döngü için, her bir devre elemanı üzerindeki voltaj düşmelerinin cebirsel toplamı, uygulanan e.m.f.'lerin cebirsel toplamına eşittir demekle aynı şeydir.

Bir model geliştirmeyi örneklemek için, Şekil 1.8'de gösterilen devreyi ele alalım.



Şekil 1.8 *Resistör/direnç, kapasitör seri devresi*

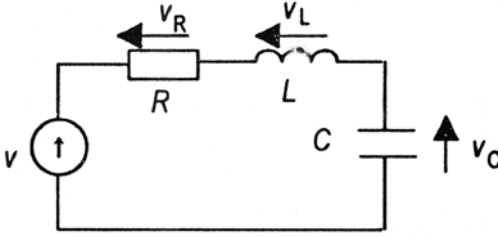
Kirchoff'un voltaj kanununu kullanarak aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

$$v = v_R + v_C$$

ve, $v_R = Ri$ ve $i = C(dv_C/dt)$ olduğundan:

$$v = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C \quad [30]$$

Bir başka örnek olarak, Şekil 1.9'da gösterilen devreyi ele alalım.



Şekil 1.9 *Resistör-indüktör-kapasitör seri devresi*

Kirchoff'un voltaj kanununu uygularsak, aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

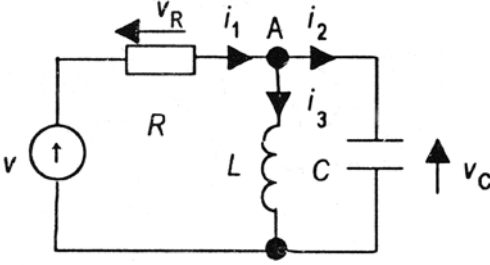
$$\begin{aligned} v &= v_R + v_L + v_C \\ &= Ri + L \frac{di}{dt} + v_C \end{aligned}$$

$i = C(dv_C/dt)$ olduğundan, $di/dt = C(d^2v_C/dt^2)$ 'dir ve bu nedenle:

$$v = RC \frac{dv_C}{dt} + LC \frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C \quad [31]$$

daha ileri bir örnek için, Şekil 1.10'u ele alalım. A eklemi için Kirchoff'un akım kanunu kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$i_1 = i_2 + i_3$$



Şekil 1.10 *Resistör-kapasitör-indüktör devresi*

Resistör üzerindeki potansiyel gerilim $(v-v_C)$ 'dir ve v_C indüktör üzerindeki, aynı zamanda kapasitör üzerindeki potansiyel gerilimdir. Böylece:

$$i_1 = \frac{v - v_C}{R}$$

$$i_2 = \frac{1}{L} \int v_C dt$$

$$i_3 = C \frac{dv_C}{dt}$$

Bu nedenle:

$$\begin{aligned} \frac{v - v_C}{R} + \frac{1}{L} \int v_C dt + C \frac{dv_C}{dt} \\ v = \frac{R}{L} \int v_C dt + RC \frac{dv_C}{dt} + v_C \end{aligned} \quad [32]$$

Elektro-mekanik sistemler

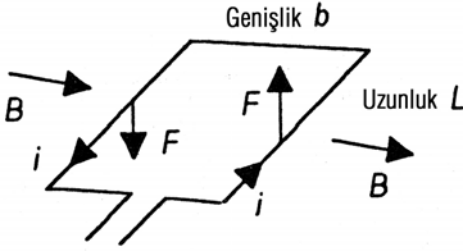
Bir yükü süren kalıcı-manyetik d.c. motorları için bir modelleme yapmaya çalışalım. Akı yoğunluğu B olan bir manyetik alana dik olan ve L uzunluğunda, akım taşıyan bir iletken üzerine etkiyen F kuvvetinin büyüklüğü: i akım olmak üzere, BiL 'dir (Şekil 1.11 N sarımlı bir bobin için, bu kuvvet $NBiL$ 'dir. Bobinin sarıllı olduğu

armatüre etki eden T torku, b sarım genişliği olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$T = N B i L b$$

Tork böylece akımla doğru orantılıdır ve bu nedenle, bir k_I sabiti için, torku aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$T = k_I i \quad [33]$$



Şekil 1.11 Armatür bobini

Eğer bir motor, eylemsizlik momenti I olan bir yükü sürüyorsa ve dönen motor şaftının ω açısal hızı için, amortisman torku $c\omega$ ise, şafta etki eden net tork aşağıdaki gibidir:

$$\text{net tork} = k_I i - c\omega$$

Bu tork, $d\omega/dt$ açısal ivmesine sebep olacak ve bu nedenle:

$$I \frac{d\omega}{dt} = k_I i - c\omega \quad [34]$$

Armatür bobini bir manyetik alan içinde döndüğünden, bobin üzerinde indüklenmiş bir e.m.f. olacaktır. Bu e.m.f., kendi oluşumuna neden olan değişimi karşılayacak yöndedir ve geri e.m.f. olarak adlandırılır. Geri e.m.f. v_b , bobine etki eden akı miktarının zamana bağlı değişimiyle doğru orantılıdır ve bu nedenle bobinin açısal hızıyla doğru orantılıdır. Böylece, k_2 sabiti için:

$$v_b = k_2 \omega \quad [35]$$

Armatür devresinin, bir resistöre seri bağlanmış bir indüktörden oluştuğu düşünülebilir (Şekil 1.12). Devreye Kirchoff'un voltaj kanununu uygularsak:

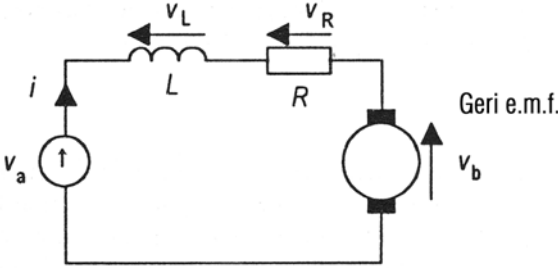
$$v_a - v_b = L \frac{di}{dt} + Ri$$

Denklem [35]'teki v_b 'yi, yerine koyarsak, aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$v_a - k_2 \omega = L \frac{di}{dt} + Ri \quad [36]$$

Böylece, açısal hızın zamana bağlı nasıl değiştiğini açıklayan, iki eşzamanlı diferansiyel denklem elde etmiş olduk, denklem [34] ve denklem [36].

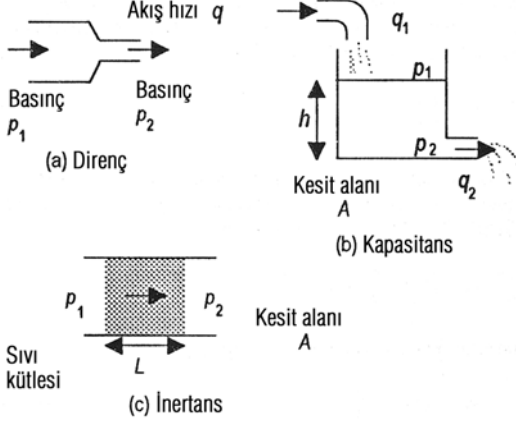
Şekil 1.12 Armatür devresi



Akışkan sistemleri

Bir akışkan sistemi için, üç yapı bloğu, direnç kapasitans ve inertans'tır; bunlar elektrikteki resistans, kapasitans ve indüktansın eşdeğerleridir. Elektrik akımının eşdeğeri, hacimsel akış hızı ve potansiyel gerilimin eşdeğeri basınç farkıdır. Hidrolik akışkan sistemlerinin sıkıştırılmaz bir sıvı içerdiği varsayılır; buna rağmen pnömatik sistemler sıkıştırılabilir gazlar içeriyor ve bunun sonucu

olarak basınç değişimleri olduğunda yoğunluk ta değişir. Figür 2.13, hidrolik sistemler için temel yapı blok formlarını gösteriyor.



Şekil 1.13 Hidrolik yapı blokları

- 1 *R Hidrolik resistansı*, bir sıvının, çapı farklı olan bir borudan, başka bir farklı çaptaki boruya akarken, akışa karşı direncidir (Şekil 1.13(a)) ve Ohm kanununun hidrolik eşdeğeri olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$p_1 - p_2 = Rq \quad [37]$$

- 2 *Hidrolik kapasitans C*, hidrolik sıvının potansiyel enerji formunda depolandığı (Şekil 1.13(b)), enerji depolanmasını tanımlar. Depolanan sıvının hacmindeki değişim hızı, sıvının kaba hacimsel giriş hızı q_1 ile çıkış hızı q_2 arasındaki farka eşittir, yani:

$$q_1 - q_2 = \frac{dV}{dt}$$

Fakat $V = Ah$ 'dir ve bu nedenle:

$$q_1 - q_2 = A \frac{dh}{dt} \quad [38]$$

Girdi ve çıktı arasındaki basınç farkı aşağıdaki gibidir:

$$p_1 - p_2 = p = h\rho g \quad [39]$$

bundan dolayı, denklem [38]'deki h 'ın yerine yazarsak:

$$q_1 - q_2 = \frac{A}{\rho g} \frac{dp}{dt} \quad [40]$$

Hidrolik kapasitans aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C = \frac{A}{\rho g} \quad [41]$$

bu nedenle denklem [40]'ı tekrar aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$q_1 - q_2 = C \frac{dp}{dt} \quad [42]$$

Bu da, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$p = \frac{1}{C} \int (q_1 - q_2) dt \quad [43]$$

- 3 *Hidrolik inertans* elektrik sistemlerindeki indüktansın eşdeğeridir. Bir akışkanı ivmelendirmek için, net bir kuvvet gereklidir ve bu basınç farkıyla sağlanır (Şekil 1.13(c)). Böylece, a ivmesi için, yani v hızının zamana bağlı değişimi için:

$$(p_1 - p_2)A = ma = m \frac{dv}{dt} \quad [44]$$

İvmelenen akışkanın kütlesi $m = A\rho l$ 'dir ve akış hızı $q = Av$ 'dir, bu nedenle denklem [44], aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(p_1 - p_2)A = L\rho \frac{dq}{dt} \quad [45]$$

$$p_1 - p_2 = I \frac{dq}{dt} \quad [46]$$

İnertans I da aşağıdaki gibidir:

$$I = \frac{L\rho}{A} \quad [47]$$

Pnömatik sistemler için:

- 1 *Pnömatik resistans* R , bir gazın akışa gösterdiği dirençtir ve kütle akış hızıyla tanımlanır dm/dt :

$$p_1 - p_2 = R \frac{dm}{dt} \quad [48]$$

- 2 *Pnömatik kapasitans* C , gerilmiş veya sıkıştırılmış bir yayın enerji depolaması ile karşılaştırılabilir ve gazların sıkıştırılabilirliği ilkesine dayanır. Eğer bir kaba giren gaz akışının kütle değişim hızı dm_1/dt ve çıkışındaki dm_2/dt ise kaptaki kütle değişim hızı $dm_1/dt - dm_2/dt$ 'dir. V hacimli bir kaptaki x yoğunluğuna sahip bir gazın kütlesi xV 'dir ve bu nedenle hem kabın hacmi ve hem de yoğunluk zamana bağlı değişeceğinden:

$$\text{kütle değişim hızı} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt} \quad [49]$$

İdeal bir gaz için, R_g gaz sabiti olmak üzere, $pV = mR_gT$ 'dir ve bu nedenle $p = x R_gT$ 'dir ve $dp/dt = R_gT(dx/dt)$ 'dir. Böylece, $V(dx/dt) = (V/R_gT)(dp/dt)$ 'dir. Buradan $(dV/dt) = (dV/dp)(dp/dt)$ bağıntısını yazabiliriz ve denklem [49] aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\text{kütle değişim hızı} = \left(\rho \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R_gT} \right) \frac{dp}{dt} \quad [50]$$

Kabın hacminin değişimine bağlı C_1 pnömatik kapasitansı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C_1 = \rho \frac{dV}{dt} \quad [51]$$

ve gazın sıkıştırılabilirliği ilkesine bağlı C_2 pnömatik kapasitansı da aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C_2 = \frac{V}{R_g T} \quad [52]$$

Bundan dolayı:

$$\text{kütle değişim hızı} = (C_1 + C_2) \frac{dp}{dt} \quad [53]$$

Bu aynı zamanda aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{C_1 + C_2} \int \left(\frac{dm_1}{dt} - \frac{dm_2}{dt} \right) dt \quad [54]$$

- 3 *Pnömatik inertans I* , blok bir gazın bir boru boyunca hareket ettirilirken momentumunun değiştirilmesi için gerekli basınç düşmesinden kaynaklanır. Newton'un ikinci kanunu kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$(p_1 - p_2)A = \frac{d(mv)}{dt} \quad [55]$$

L uzunluğunda, düzenli bir A kesit alanına ve ρ yoğunluğuna sahip bir blok gazın kütlesi $m = \rho LA$ 'dır. Böylece:

$$(p_1 - p_2)A = L \frac{d(\rho Av)}{dt} \quad [56]$$

akışın kütle değişim hızı ρAv 'dir ve bu nedenle denklem [56] aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$p_1 - p_2 = \frac{L}{A} \frac{d}{dt} (\text{kütle akış hızı}) \quad [57]$$

Pnömatik inertans I aşağıdaki gibi tanımlanır:

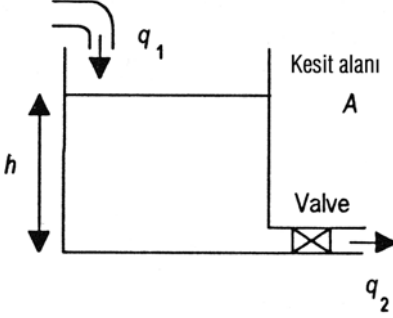
$$I = \frac{L}{A} \quad [58]$$

ve denklem [57] aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$p_1 - p_2 = I \frac{d}{dt} (\text{kütle akış hızı}) \quad [59]$$

Bir hidrolik sistem örneği için, Şekil 1.14'teki sistemi ele alalım. Akış hızlarının çok yavaş değiştiği varsayılabileceğinden, inertansı ihmal edebiliriz. Kapasitans terimi için aşağıdaki ifadeye sahibiz:

$$q_1 - q_2 = C \frac{dp}{dt} = \frac{A}{\rho g} \frac{dp}{dt} \quad [60]$$



Şekil 1.14 Hidrolik sistem

Valf resistansı için, elimizde aşağıdaki ifade var:

$$p_1 - p_2 = Rq_1$$

Böylece, denklem [61]'de q_2 'yi yerine yazarsak ve basınç farkı $h\rho g$ ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$q_1 = A \frac{dh}{dt} + \frac{h\rho g}{R} \quad [61]$$

Bir pnömomatik sisteme örnek olarak, Figür 2.15'te gösterilen körük sistemini ele alalım. Körüklere doğru olan akış hızının çok yavaş değişmesini beklediğimizden, İntertans ihmal edilebilir. Resistans değişkeni, körüklere doğru olan kütle akış hızı için, aşağıdaki bağıntıyı verir:

$$p_1 - p_2 = R \frac{dm}{dt}$$

ve kapasitans değişkenleri, körüklere doğru olan kütle akış hızı için, aşağıdaki bağıntıyı verir:

$$\text{kütle değişim hızı} = (C_1 + C_2)R \frac{dp_2}{dt}$$

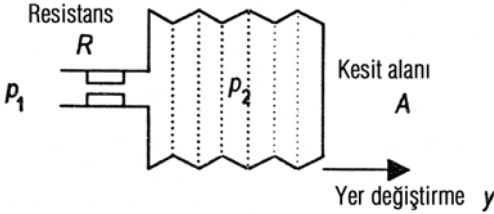
Fakat körüklerden dışarı hiç bir kütle akışı yok, bu nedenle akış hızı $= dm/dt$ 'dir ve bu sebeple aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\frac{p_1 - p_2}{R} = (C_1 + C_2) \frac{dp_2}{dt} \quad [62]$$

körük sadece bir yay formudur ve bu nedenle, k körük elastikiyeti, y basınç sonucu uzama miktarı olmak üzere, $F = p_2 A = ky$ yazabiliriz. Bunun sonucunda, denklem [62] aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$p_1 = R(C_1 + C_2) \frac{k}{A} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{A} y \quad [63]$$

$C_1 = r(dV/dp_2)$ 'dir ve $V = Ay$ olduğundan ve $p_2 A = ky$ olduğundan, $V = A^2 p_2 / k$ 'dir; o zaman, $C_1 = rA^2 / kV$ 'dir. R_g gaz sabiti olmak üzere, $C_2 = V/R_g T = Ay/R_g T$ 'dir. Bunun sonucunda, denklem [63] aşağıdaki şekilde yazılabilir:



Şekil 1.15 Körükler

$$p_1 = R \left(\frac{\rho A^2}{k} + \frac{Ay}{R_g T} \right) \frac{k}{A} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{A} y \quad [64]$$

Termal sistemler

Termal sistemler iki tane temel yapı bloğuna sahiptir: resistans ve kapasitans.

- 1 *Termal resistans* R , q ısı akış hızının oluşturduğu resistanstır ve T_2-T_1 ısının aktığı ortamlar arasındaki sıcaklık farkı olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$q = \frac{T_2 - T_1}{R} \quad [65]$$

- 2 *Termal kapasitans*, bir sistem içinde, iç enerji depolaması için bir ölçme birimidir. Eğer bir sistemin içine doğru olan ısı akış hızı q_1 ve sistemden dışarı doğru ısı akış hızı q_2 ise, sistemin iç enerjisinin değişim hızı q_1-q_2 'dir. İç enerjideki bir artış, sıcaklık değişimine neden olabilir; m kütle, c özgül ısı kapasitesi olmak üzere:

$$\text{iç enerji değişim miktarı} = mc \frac{dT}{dt}$$

Böylece iç enerji değişim hızı, mc ile sıcaklık değişim hızının çarpımına eşittir. Bundan dolayı:

$$q_1 - q_2 = mc \frac{dT}{dt}$$

Bu denklem, $C = mc$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$q_1 - q_2 = C \frac{dT}{dt} \quad [66]$$

Bir katı aracılığıyla ısı iletimi için, ısı akışının hızı, kesit alanıyla ve sıcaklık gradyanıyla doğru orantılıdır. Bu nedenle, T_1 ve T_2 sıcaklığına sahip ve aralarındaki uzaklık L olan iki nokta için, k sıcaklık iletim değişkeni olmak üzere:

$$q = Ak \frac{T_1 - T_2}{L} \quad [67]$$

Bu nedenle, bu biçimde bir ısı transferi için termal resistans R , L/Ak 'dir. İki nokta arasında konveksiyon yoluyla ısı transferi için, Newton'un soğuma kanunuyla, (T_2-T_1) sıcaklık farkı, h ısı transfer değişkeni ve A sıcaklık değişiminin olduğu yüzeyin alanı olmak üzere aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$q = Ah(T_2 - T_1) \quad [68]$$

Böyle yapılan bir ısı transferi için termal resistans, bu nedenle $1/Ah$ 'tır.

Bir örnek olarak, T sıcaklığındaki bir termometrenin, T_L sıcaklığında daha sıcak bir sıvının içine konduğu basit termal sistemi ele alalım. Sıvıdan termometreye doğru ısı akışına karşı gelen termal resistans aşağıdaki gibidir:

$$q = \frac{T_L - T}{R} \quad [69]$$

Termometrenin termal kapasitansı aşağıdaki şekilde bulunur:

$$q_1 - q_2 = C \frac{dT}{dt}$$

Sıvıdan termometreye doğru, sadece net bir ısı akışı olduğundan dolayı, bu denklemi aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$q = C \frac{dT}{dt} \quad [70]$$

Bunu, denklem [69]'taki q 'nun yerine yazarsak, aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$C \frac{dT}{dt} = \frac{T_L - T}{R}$$

Bu, yeniden düzenlendiğinde aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$RC \frac{dT}{dt} + T = T_L \quad [71]$$

Diferansiyel bağıntılar

Bu bölümde daha önce ele alınan modellerden de anlaşılabilceği gibi, bir çok sistem diferansiyel denklemlerle ifade edilebilir. Bir *diferansiyel denklem*, bir fonksiyonun türevlerini içeren denklemdir. *Normal diferansiyel denklem* terimi, sadece tek bağımsız değişken söz konusu olduğunda kullanılır; eğer iki ve daha çok bağımsız değişken varsa, denklem, *parçalı diferansiyel denklem* olarak adlandırılır. Bir diferansiyel denklemin *derece*'si, denklemde olan en yüksek dereceli türevin derecesi olarak tanımlanır. Örnek olarak, yukarıda [71] no'lu denklem, en yüksek dereceli türev dT/dt olduğundan ve sadece bir bağımsız değişken bulunduğundan; bu

denklem birinci-derece normal bir diferansiyel denklemdir. [31]. Denklem, yani:

$$v = RC \frac{dv_c}{dt} + LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} + v_c$$

en yüksek dereceli türev $d^2 v_c / dt^2$ olduğundan ve sadece bir bağımsız değişkeni bulunduğu; ikinci-derece olağan diferansiyel denkleme örnek gösterilebilir. Genelde, n 'inci dereceden bir olağan diferansiyel denklem, y zamana bağlı bir fonksiyon ise, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ katsayılar olmak üzere, aşağıdaki forma sahiptir:

$$a_n \frac{dy^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t) \quad [72]$$

Eğer bağımlı değişken ve bütün türevleri birinci-dereceyse, bağımlı değişkeni içeren bir terimler çarpımı yoksa, yani $y(dy/dt)$ yoksa, değişkenin trigonometrik logaritmik veya üstel fonksiyon formları yoksa, bu diferansiyel denklem *lineer*'dir denir. Örnek olarak, $dy/dt + y^2 = 0$ ve $(dy/dt)^2 + y = 0$ lineer diferansiyel denklem değildir.

Diferansiyel denklemleri çözmek

Birinci-dereceden bir diferansiyel denklemi, eğer değişkenler ayrılabilirse, yani aşağıdaki formdaysa:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad [73]$$

bu tip denklemleri, her iki tarafında x 'e göre türevini alarak çözebiliriz.

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx$$

Bu, değişkenleri ayırarak aşağıdaki ifadeyi yazmakla eşdeğerdir:

$$\int dy = \int f(x) dx \quad [74]$$

Aşağıdaki forma sahip birinci-derece bir fonksiyonu ele alalım:

$$a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad [75]$$

Bir sisteme, harici bir kuvvetin etkisiyle bir girdi yoksa, homojen bir denklem elde edilir, harici bir kuvvetin etkisiyle bir girdi varsa homojen olmayan bir denklem elde edilir. Örnek olarak: kapasitör üstündeki potansiyel farkın (yükler kapasitörden boşalırken) zamana bağlı nasıl değiştiğini açıklayan ve sadece bir dirence seri bağlı yüklü bir kapasitöre sahip bir elektrik devresi için homojen bir diferansiyel denklem elde edilir.

Buna rağmen kapasitör'e ve resistör'e seri bir e.m.f. kaynağımız varsa; e.m.f. kaynağı, zorlayıcı bir girdi sağlar ve homojen olmayan bir denklem elde edilir. Birinci-dereceden diferansiyel denklemimiz $dy/dx + y = 0$ olsun. Bu tip bir denklem homojendir ve çözümü $y = Ce^{-x}$ dir. Şimdi de denklemimiz $dy/dx + y = 0$ olsun.

Bu tip bir denklem homojen değildir. Bunun çözümü, $y = Ce^{x+2}$ dir. Böylece, bunun çözümü, homojen denklemin genel çözümünüyle bir başka terimin toplamıdır. Homojen diferansiyel denklemin genel çözümü, *tamamlayıcı fonksiyon* olarak, homojen olmayan çözüm için eklenen terim ise *belirli integral* olarak adlandırılır. Belirli integral, belirlenmiş bir çözümdür; bu durum için homojen olmayan denklem için, $y = 2$ dir. Eğer bu homojen olmayan denklemde yerine konursa, $0 + 2 = 0$ elde ederiz. Bu da gerçekte bunun *belirli* bir çözüm olduğunu doğrular. Belirli bir integral elde etmek için, çözümün diferansiyel denklemin zorlayıcı terimiyle aynı formda olacağını varsaydık. Böylece, eğer bu bir katsayı ise, $y = A$ 'yı deneriz, eğer $a + bx + cx^2 + \dots$ formundaysa; $y = A + Bx + Cx^2 + \dots$ 'yi deneriz, eğer üstel bir terimse, $y = e^{kx}$ 'si deneriz; eğer bir sinüs veya kosinüs ise, $y = A \sin \omega x + B \cos \omega x$ 'i deneriz.

Örnek olarak, $dy/dx + y = 2x$ diferansiyel denklemini ele alalım: Denklemin homojen hali, $dy/dx + y = 0$ 'dır. Değişkenleri ayırarak, $y = e^{-x}$ tamamlayıcı fonksiyonunu verecek şekilde çözebiliriz. Belirli integral için, $y = A + Bx$ 'i deneriz. Diferansiyel denklemde bunu yerine koyarsak, $B + A + Bx = 2x$ denklemini elde ederiz. Katsayıları eşitlersek, $A = -2$ ve $B = 2$ sonucunu buluruz. Böylece belirli integral, $y = -2 + 2x$ 'dir ve bu nedenle homojen olmayan diferansiyel denklemin çözümü $y = Ce^{-x} - 2 + 2x$ 'dir.

İkinci-dereceden bir diferansiyel denklemin çözümünü elde etmek için, tamamlayıcı fonksiyon ve belirli integral bulma tekniğini kullanabiliriz. Bir örnek olarak, aşağıdaki ikinci-derece diferansiyel denklemin çözümünü belirlemeyi ele alalım:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = x^2$$

Bu denklemin homojen hali aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Bunun için, çözümün, $y = Ce^{kx}$ şeklinde olduğunu varsayabiliriz ve bunu homojen denklemde yerine koyarsak, aşağıdaki yardımcı denklemini elde ederiz:

$$s^2 - 5s + 6 = 0$$

Bu, çarpanlarına ayrılırsa $(s-3)(s-2)$ elde edilir ve bu nedenle ikide değerimiz var; $s_1 = 3$ ve $s_2 = 2$. Böylece tamamlayıcı fonksiyon aşağıdaki gibidir:

$$y = Ae^{3x} + Be^{2x}$$

Belirli integrali bulmak için, $y = C + Dx + Ex^2$ 'yi deneriz. Bunu homojen olmayan denklemde yerine koyarsak, aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$2E - 5(2Ex + D) + 6(C + Dx + Ex^2) = x^2$$

Katsayılar eşitlenirse, $C = 19/108$, $D = 5/18$ ve $E = 1/6$ bulunur. Böylece belirli integral, aşağıdaki gibidir:

$$y = \frac{19}{108} + \frac{5}{18}x + \frac{1}{6}x^2$$

böylece homojen olmayan diferansiyel denklem için çözüm aşağıdaki gibidir:

$$y = Ae^{3x} + Be^{2x} + \frac{19}{108} + \frac{5}{18}x + \frac{1}{6}x^2$$

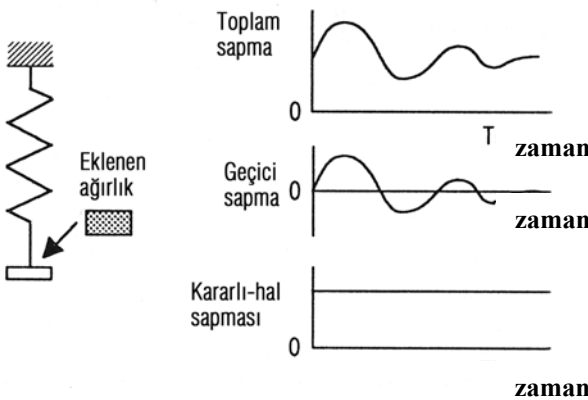
2. DİNAMİK TEPKİ

Geçici ve kararlı hâl tepkileri

Eğer kilonuzu ölçmek üzere bir baskül üzerine çıkarsanız, baskül'ün göstergesindeki rakamlar, kararlı bir değere dönüşene kadar, bir süre salınım yapar. Bu özellik, bir çok sistemin karakteristik özelliğidir: bir girdi değişikliği olduğu zaman oluşan ve zamanla yok olan geçici bir tepki ve bütün geçici tepkiler yok olduğu zaman ortaya çıkan kalıcı hâl. Bir sistemin toplam tepkisi, geçici ve kararlı-hâl tepkilerinin toplamıdır.

$$\text{toplam tepki} = \text{geçici tepki} + \text{kararlı-hâl tepkisi} [1]$$

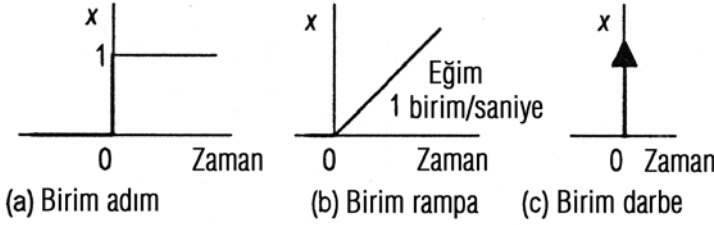
Şekil 2.1, dikey bir yay sistemine bir anlık asılan bir ağırlık sonucu nasıl tipik bir tepki verdiğini resmediyor.



Şekil 2.1 Ani bir girdiye karşı tepki

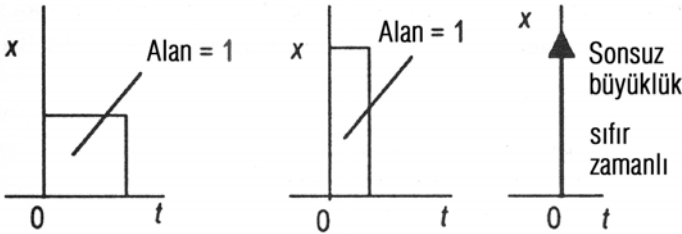
Standart girdi sinyalleri

Standart girdi sinyalleri, birim adım, birim rampa ve darbe'dir; Şekil 2.2, $t = 0$ anında başlayan bu tip sinyallerin, idealize edilmiş formlarını gösteriyor. Birim adım fonksiyonu $u(t)$ ile gösterilmektedir.



Şekil 2.2 Standart girdi sinyalleri

$t = 0$ anında oluşan birim adım, $t < 0$ için 0 değerine, $t > 0$ için 1 değerine sahiptir. $t = 0$ anında başlayan birim rampa, $t < 0$ için 0 değerine, $t > 0$ için t anında $1t$ değerine sahiptir. $t = 0$ anındaki birim darbe, genişlik olarak sıfır aralığına indirgenmiş ve böylece $t = 0$ anında sonsuz bir yüksekliğe ve 1 birim alana sahip, dikdörtgen bir darbe şeklinde düşünülebilir (Şekil 2.3). birim darbe fonksiyonu $\delta(t)$ ile gösterilir.



Şekil 2.3 Birim darbe

Birinci-derece sistemlerin tepkisi

Birinci-derece bir sistemin bir birim adım girdisine verdiği tepkiyi düşünelim; mesela, sıcak bir sıvıya bir anda sokulan bir termometrenin tepkisini düşünelim. Bu ani değişim, adım girdisine bir örnektir. Birinci bölümde, böylesi bir değişime karşılık gelen diferansiyel denklem [71], aşağıdaki gibi belirlenmişti:

$$RC \frac{dT}{dt} + T = T_L \quad [2]$$

burada, T , termometre tarafından gösterilen sıcaklık; T_L , sıvının sıcaklığı; R , termal resistans; C , termal kapasitanstır. Böylesi bir denklemi ‘değişkenlerine ayırma’ tekniğiyle çözebiliriz. Böylece, değişkenlerine ayırmak bize aşağıdaki denklemi verir:

$$\frac{1}{T - T_L} dT = \frac{1}{RC} dt \quad [3]$$

daha sonra integral alırsak, A bir sabit olmak üzere, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$-\ln(T - T_L) = (1/RC)t + A$$

Bu denklem, B bir sabit olmak üzere ve $t = 1/RC$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$T - T_L = e^A e^{-t/\tau} = B e^{-t/\tau}$$

τ zaman sabiti olarak adlandırılır ve e^{-1} üssel terimini oluşturmak için gereken zaman olarak düşünülebilir. Eğer termometreyi sıcak sıvıya $t=0$ anında soktuğumuzu düşünürsek ve o anda T_0 sıcaklığını gösteriyorsa; o zaman $B = T_L - T_0$ denklemini elde etmemiz gerekir. Bu sebeple denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$T = (T_0 - T_L) e^{-t/\tau} + T_L \quad [4]$$

t büyüdükçe üssel terim yok olacak ve geçici tepkiyi verecektir. T_L , netice olarak elde edilecek kararlı-hal değeridir.

Tablo 2.1, zaman sabitinin farklı katları için, elde edilen kararlı-hâl tepkilerinin yüzdesini gösteriyor.

Tablo 2.1 Birinci-derece sistem tepkisi

Zaman	% tepki
0	0
1 τ	63.2
2 τ	86.5
3 τ	95.0
4 τ	98.2
5 τ	99.3
∞	100.0

Daha ileri bir örnek olarak, termometrenin bir rampa sıcaklık girdisine verdiği tepkiyi düşünelim: mesela zamanla düzenli biçimde artan bir sıcaklık olsun. Diferansiyel denklem, a bir sabit ve T_0 $t=0$ anındaki sıcaklık olmak üzere aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$RC \frac{dT}{dt} + T = at + T_0 \quad [5]$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$T = a\tau e^{-t/\tau} + a(t - \tau) + T_0 \quad [6]$$

Üssel terim, geçici tepkiyi, diğer terimler kararlı-hal tepkisini verir. Kararlı-hal tepkisi için dikkat edilmesi gereken nokta, termometrenin her zaman gerçek sıcaklıktan daha düşük bir değeri göstermesidir. t anında gerçek sıcaklık $at + T_0$ 'dır ve bu nedenle kararlı-hal hatası $a\tau$ 'dır.

İkinci-derece bir sistemin tepkisi

Şekil 2.3'te görülen formda bir yay-amortisman-kütle sistemini düşünelim. $t = 0$ anında bir F kuvvet girdisine maruz kalan kütle yer değiştirmesi y 'ye karşılık gelen diferansiyel denklem(ünite 2, denklem[12]), aşağıdaki gibidir:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F \quad [7]$$

Sönümleme ve F kuvvetinin varlığında, aşağıdaki homojen diferansiyel denklemi elde ederiz:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0 \quad [8]$$

Bu, $-y$ ile orantılı bir ivmeye sahip bir salınımı tanımlar ve basit bir harmonik hareketin tanımlarından biridir. Bu denklemin bir çözümü $y = \sin \omega t$ 'dir. Eğer bunu denklem [8]'de yerine koyarsak, $\omega = \sqrt{(k/m)}$ 'yi elde ederiz. Bu, ω_n *doğal açısal frekans* olarak adlandırılır.

Eğer bu terimi kullanırsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [9]$$

ve *sönümleme oranı* diye adlandırılan sabiti aşağıdaki gibi tanımlarsak:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad [10]$$

denklem [7]'yi aşağıdaki formda yazabiliriz:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dy}{dt} + y = \frac{F}{k} \quad [11]$$

Bu diferansiyel denklem, tamamlayıcı fonksiyon ve belirli integral saptaması metoduyla çözülebilir. Diferansiyel denklemin homojen formu için, yani sıfır girdili denklem için:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$y=Ae^{st}$ formunda bir çözüm bulmayı deneyebiliriz. Bu, bize aşağıdaki yardımcı denklemi verir:

$$\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1 = 0$$

$$s^2 + 2\omega_n \zeta s + \omega_n^2 = 0$$

Bu denklemin kökleri aşağıdaki gibidir:

$$s = \frac{-2\omega_n \zeta \pm \sqrt{4\omega_n^2 \zeta^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\omega_n \zeta \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad [12]$$

- 1 Sönümleme oranı 0 ile 1 arasında ise
İki tane karmaşık kök vardır:

$$s = -\zeta \omega_n \pm j \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Bunu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$s = -\zeta \omega_n \pm j \omega \quad [13]$$

Eğer

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad [14]$$

ise, bunun sonucunda aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\begin{aligned} y &= A e^{(-\zeta \omega_n + j \omega)t} + B e^{-\zeta(\omega_n - j \omega)t} \\ &= e^{-\zeta \omega_n t} (A e^{j \omega t} + B e^{-j \omega t}) \end{aligned}$$

Euler denklemini kullanarak, bunu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$y = e^{-\zeta \omega_n t} (P \cos \omega t + Q \sin \omega t) \quad [15]$$

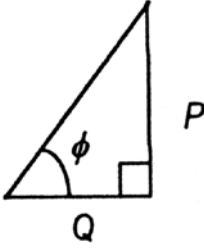
Bu bir başka alternatif formda yazılabilir. ϕ açısı ve P ve Q karşı kenarlarına sahip dik-açılı bir üçgen düşünürsek (Şekil 2.4),

$$\sin \phi = P / \sqrt{(P^2 + Q^2)} \quad \text{ve} \quad \cos \phi = Q / \sqrt{(P^2 + Q^2)} .$$

Bu sebeple, bu bağıntıyı kullanarak, $\sin(\omega t + \phi) = \sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi$ 'dir ve denklem [15]'i, C bir sabit ve ϕ faz farkı olmak üzere, aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$y = C e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega t + \phi) \quad [16]$$

Bu sönümlü sinüzoidal salınımı tanımlar. Böylesi bir hareket, alt sönümlüdür.



Şekil 2.4 ϕ açısı

2 Sönümleme oranı 1'e eşitse

Bu, eşit iki kök verir, $s_1 = s_2 = -\omega_n$, ve çözümü, A ve B sabit olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$y = (At + B)e^{-\omega_n t} \quad [17]$$

Bu, salınımı olmayan üstel bir bozunmayı tanımlar. Bu tip bir hareket kiritik sönümlü hareket olarak adlandırılır.

3 Sönümleme oranı 1'den büyükse

Bu, iki reel kök verir:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\omega_n \zeta + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 &= -\omega_n \zeta - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad [18]$$

Bunun sonucunda, A ve B sabitler olmak üzere, aşağıdakini elde ederiz:

$$y = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad [19]$$

Bu, kararlı-hal değerine ulaşması, kritik sönümlemeli durumdan daha uzun süren üssel bir bozunmayı tanımlar. Bu hareket, üst sönümlemeli hareket olarak adlandırılır.

Yukarıdaki analiz, ikinci-derece diferansiyel denklem için tamamlayıcı fonksiyonları verir. Belirli bir integral için, F büyüklüğünde bir adım girdisine sahip olduğumuz bu durum için, belirli integral $x = A'y$ ı deneyebiliriz. Bunu diferansiyel denklem [11]'de yerine koyarsak, $A=F/k$ bağıntısını elde ederiz ve böylece belirli integral $y=F/k$ 'dır. Böylece, diferansiyel denklemin çözümleri aşağıdaki gibidir:

- 1 *Sönümleme oranı 0 ile 1 arasında ise, yani alt sönümlü ise;*

$$y = Ce^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega t + \phi) + F/k \quad [20]$$

- 2 *Sönümleme oranı 1'e eşit ise, yani kritik sönümlü ise;*

$$y = (At + B)e^{-\omega_n t} + F/k \quad [21]$$

- 3 *Sönümleme oranı 1'den büyük ise, yani üst sönümlü ise;*

$$y = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + F/k \quad [22]$$

Her durumda, t sonsuza giderken; y , F/k değerine gidiyor. Bunun sonucunda, kararlı-hal değeri F/k 'dır.

Transfer fonksiyonu

Diferansiyel denklemler, henüz çıktı ve girdi arasındaki bağıntıyı net biçimde ifade etmemizi sağlamıyor. Bunu yapmanın basit bir yolu transfer fonksiyonu kullanmaktır. Bunu kullanmak için, girdi ve çıktının zamana nasıl bağlı olduğunu gösteren diferansiyel denklemi, Laplace dönüşümü olarak adlandırılan bir teknik kullanarak, basit bir cebirsel denkleme dönüştürürüz. Bu dönüşüm, zaman düzleminden, s -düzlemine yapılır.

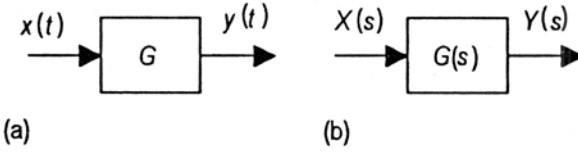
Bir sistemin kararlı-hal kazancı, kararlı-hal çıktısının girdiye oranı olarak tanımlanır. Transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\text{Transfer fonksiyonu} = \frac{\text{çıktının Laplace dönüşümü}}{\text{girdinin Laplace dönüşümü}} \quad [23]$$

Girdi $x(t)$ için, çıktı $y(t)$ 'dir. Transfer fonksiyonunun, girdi ve çıktının s-düzleminde olduğunu göstermek için, denklem aşağıdaki şekilde yazılır:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad [24]$$

büyük harfler s-düzlemindeki değişkenler için kullanılır. Bunun sonucu, s-düzlemindeki bir sistem, Şekil 3.5'te gösterildiği gibi tasvir edilebilir.



Şekil 3.5 Zaman düzleminde(a), ve s-düzleminde(b) sistem

Laplace dönüşümü

Bir zaman fonksiyonu $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümü şu şekilde tanımlanır:

Verilen zaman fonksiyonu $f(t)$ 'yi e^{-st} ile çarpalım ve çarpımın sıfırla sonsuz arasında integralini alalım. Sonuç alabiliyorsak, $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümü olarak adlandırır ve $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ şeklinde gösteririz.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad [25]$$

İntegralin 0 ile $+\infty$ arasında alındığını ve bu yüzden tek-taraflı olduğunu ve $-\infty$ ile $+\infty$ tam zaman aralığında alınmadığını dikkat edin.

Bir örnek olarak, $f(t) = e^{at}$ Laplace dönüşümünü ele alalım. Denklem [25]'i kullanarak:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}\end{aligned}\quad [26]$$

Bir başka örnek, birim adım fonksiyonunun Laplace dönüşümünü ele alalım. Laplace dönüşümü [27] ile verilmiştir:

$$\int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad [27]$$

Şimdi birim darbe fonksiyonunun $\delta(t)$ dönüşümünü ele alalım. Böyle bir darbe fonksiyonunun, genişliği k olan bir birim alan dikdörtgen darbe fonksiyonunun k genişliğinin, limit $k \rightarrow 0$ 'a giderken, darbe fonksiyonunu verecek şekilde azaltılmasıyla oluştuğu düşünülebilir. Şekil 2.6'da gösterilen, birim alan dikdörtgen darbe için, Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

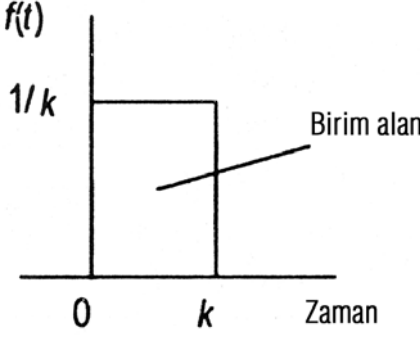
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\text{birim alan darbe}\} &= \int_0^k \frac{1}{k} e^{-st} dt + \int_k^{\infty} 0 e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{1}{sk} e^{-st} \right]_0^k \\ &= -\frac{1}{sk} (e^{-sk} - 1)\end{aligned}$$

Üssel fonksiyonunun yerine seri açılımını koyabiliriz, böylece elde ettiğimiz:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\text{birim alan darbe}\} &= -\frac{1}{sk} \left(1 + (-sk) + \frac{(-sk)^2}{2!} - \frac{(-sk)^3}{3!} + \dots - 1 \right)\end{aligned}$$

Böylece limit $k \rightarrow 0$ 'a giderken, Laplace dönüşümü 1 'e doğru gider ve bu nedenle bir darbenin $t = 0$ 'da Laplace dönüşümü:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad [28]$$



Şekil 2.6 Birim alan dikdörtgen darbe

Böyle integrallerle uğraşmak yerine, standart dönüşümlerin tabloları mevcuttur ve bu tablolar, bu gibi dönüşümlerin temel özellikleri ile birlikte, çoğu problemin üstesinden gelmeyi sağlar. Tablo 2.2, yaygın bazı dönüşümleri gösteriyor.

Tablo 2.2 Laplace dönüşümleri

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
birim darbe $\delta(t)$	1
birim adım $u(t)$	$\frac{1}{s}$
birim rampa t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$

$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
$(1-at) e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
$1 - \frac{b}{b-a} e^{-at} + \frac{a}{b-a} e^{-bt}$	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega t} \sin \omega \sqrt{1-\zeta^2} t, \zeta < 1$	$\frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$
$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)}$
$\cos \phi = \zeta$	

Temel özellikler

Aşağıdakiler, dönüşümün bazı temel özellikleridir:

1 Lineerlik

Eğer iki ayrı zaman fonksiyonu $f(t)$ ve $g(t)$ Laplace dönüşümüne sahipse, zaman fonksiyonlarının toplamının Laplace dönüşümü, yani $f(t)+g(t)$, iki fonksiyonun Laplace dönüşümlerinin toplamına eşittir:

$$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\} \quad [29]$$

2 Birinci kaydırma teoremi, e^{-at} çarpanı

Bu teoremin ifade ettiği, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a) \quad [30]$$

Dolayısıyla, s yerine $s+a$ koymak bir zaman fonksiyonunu e^{-at} ile çarpmaaktır.

3 İkinci kaydırma teoremi, zaman kaydırması

İkinci kaydırma teoremi, eğer bir sinyal T zamanı kadar geciktirilirse, bu sinyalin Laplace dönüşümünün e^{-sT} ile çarpıldığını ifade eder. Dolayısıyla, $F(s)$, $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümü ise:

$$\mathcal{L}\{f(t-T)u(t-T)\} = e^{-sT} F(s+a) \quad [31]$$

4 Periyodik fonksiyonlar

Sinyalin birinci periyodundaki fonksiyonun Laplace dönüşümü $F_1(s)$ ise T periyotlu bir periyodik sinyalin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{1-e^{-sT}} F_1(s) \quad [32]$$

5 Türevler

Bir fonksiyonun türevinin Laplace dönüşümünü belirlemeyi ele alalım, yani $\mathcal{L}\{df(t)/dt\}$. Denklem [25]'i kullanarak:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} f(t) dt$$

Parçalı integrali kullanarak, $f(0)$, $f(t)$ 'nin $t=0$ anındaki değeri ve $F(s)$, $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümü olmak üzere :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = -f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + sF(s) \quad [33]$$

İkinci-derece bir türev için, $df(0)/dt$, $t=0$ anında birinci türevin değeri olmak üzere, benzer biçimde aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d^2}{dt^2} f(t) dt \\
 &= \left[e^{-st} \frac{d}{dt} f(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} f(t) dt \\
 &= -\frac{d}{dt} f(0) + s[-f(0) + sF(s)] \\
 &= s^2 F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt} f(0) \quad [34]
 \end{aligned}$$

Benzer biçimde, üçüncü-derece bir türev için, $d^2 f(0)/dt^2$, $t=0$ anında ikinci türevin değeri olmak üzere, aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3}{dt^3} f(t)\right\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s \frac{d}{dt} f(0) - \frac{d^2}{dt^2} f(0) \quad [35]$$

Denklem [33], [34], [35]'ten de anlaşılacağı üzere:

Başlangıç değerleri sıfır olmak üzere, zamana bağlı bir fonksiyonun türevini almak, bu fonksiyonun Laplace dönüşümünü s ile çarpmakla eşdeğerdir.

6 İntegraller

Bir fonksiyonun integralinin Laplace dönüşümü için, yani:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\}$$

Eğer $g(t) = \int_0^t f(t) dt$ olursa:

$$\frac{d}{dt} g(t) = f(t)$$

Denklem [33] kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} g(t)\right\} = sG(s) - g(0)$$

$g(0)=0$ ve $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}$ olduğundan:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}$$
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s) \quad [36]$$

Bir fonksiyonun integralini almak, fonksiyonun Laplace dönüşümünü s 'ye bölmek ile eşdeğerdir.

Ters Laplace dönüşümü

Ters Laplace dönüşümü, bir Laplace dönüşümünün, bir zaman fonksiyonuna dönüştürülmesidir. Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ ise $f(t)$, $F(s)$ 'in *ters Laplace dönüşümü*'dür, tersi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad [37]$$

Tersi, genelde, standart dönüşümler kullanılarak elde edilebilir; yani Tablo 2.2'deki dönüşümler gibi... Tersinin temel özellikleri, standart dönüşümlerle beraber, tablodaki dönüşümlerden daha geniş çaplı dönüşümleri elde etmek için kullanılabilir.

Ters Laplace dönüşümünün temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

- 1 Laplace dönüşümünün *lineer* olma özelliği aşağıdaki anlama karşılık gelir; eğer elimizde, iki ayrı terimin toplamından oluşan bir dönüşüm varsa, her ikisinin tersini ayrı ayrı alabiliriz ve iki ters dönüşümün toplamı, toplamın ters dönüşümüdür:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) + G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \quad [38]$$

Lineerlik aynı zamanda, a bir sabit olmak üzere, aşağıdaki özelliği verir:

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad [39]$$

- 2 *Birinci kaydırma teoremi*, ters formda, $f(t)$, $F(s)$ 'in ters dönüşümü olmak üzere, aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t) \quad [40]$$

- 3 *İkinci kaydırma teoremi*, ters formda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-sT}F(s)\} = f(t-T)u(t-T) \quad [41]$$

Sonuç olarak, eğer ters dönüşüm payında, e^{-sT} terimi varsa, bu terimi ifadeden kaldırırız, kalan kısmın ters Laplace dönüşümünü alırız ve sonuçta elde ettiğimiz bağıntıda, t yerine $(t-T)$ koyarız.

Çoğu zaman $F(s)$, iki polinomun oranıdır ve standart bir form olarak belirlenemez. Buna rağmen, kısmi kesir kullanımı, çoğu zaman bu tip bir ifadeyi, standart dönüşümlerle dönüştürülebilecek basit kesirlere indirger. Paydanın derecesi, payın derecesinden büyük olduğu zaman, bu ifade doğrudan kısmi kesirlere ayrılabilir.

Kısmi kesir tarafından oluşturulan form, elimizdeki payda tipine bağlıdır.

- 1 Eğer payda *lineer faktör* içeriyorsa, yani $(x+a)$ formunda bir faktör; o zaman, bu tipte her bir faktör için, A bir sabit olmak üzere, aşağıdaki formda bir kesir vardır:

$$\frac{A}{x+a} \quad [42]$$

- 2 Eğer payda, *tekrar eden lineer faktör* içeriyorsa, yani $(x+a)^n$ formunda bir faktör; o zaman, $(x+a)^n$ 'nin her bir kuvveti için bir kısmi kesir olmak üzere, aşağıdaki formda kesirler olacaktır:

$$\frac{A}{(x+a)} + \frac{B}{(x+a)^2} + \dots + \frac{C}{(x+a)^n} \quad [43]$$

- 3 Eğer payda, *indirgenemeyen kuadratik faktör* içeriyorsa, yani ax^2+bx+c formunda bir faktör; o zaman, her bir faktör için, aşağıdaki formda bir kısmi kesir vardır:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \quad [44]$$

- 4 Eğer payda, *tekrar eden kuadratik faktör* içeriyorsa, yani $(ax^2+bx+c)^n$; o zaman, kuadratik denklemin her bir kuvveti için, aşağıdaki formda kısmi kesirler vardır:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^n} \quad [45]$$

A, B, C v.b. sabitlerinin değerleri, ya kesrin ve bu kesrin kısmi kesirlerinin eşitliğinin bütün x değerleri için doğru olduğu gerçeğinden bulunur; ya da kesirdeki x^n 'in katsayılarının kısmi kesirler çarpıldıktan sonraki kesirdeki x^n 'lere eşit olduğu gerçeğinden bulunur. Bunu örneklemek için, aşağıdaki kesrin sadeleştirmesini düşünün:

$$\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}$$

Bu, paydasında iki tane lineer faktör barındırır ve bu yüzden kısmi kesirleri, her bir lineer terim için bir kısmi kesir olmak üzere, aşağıdaki formdadır:

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

Bu iki ifadenin eşit olması için, aşağıdaki bağıntıyı elde etmemiz gerekir:

$$\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

Böylece, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$3x+4 = A(x+2) + B(x+1)$$

Bu bağıntının bütün x değerleri için doğru olduğu gerekliliğini düşünün. O zaman, $x=-1$ olduğu zaman, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$-3 + 4 = A(-1 + 2) + B(-1 + 1)$$

Bu sebeple $A=1$ 'dir. $x=-2$ olduğu zaman aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$-6 + 4 = A(-2 + 2) + B(-2 + 1)$$

Bu sebeple $B=2$ 'dir. Alternatif olarak, bu ifadeyi çarparak ve katsayıları göz önüne alarak, bu katsayıları belirleyebildik, yani:

$$3x + 4 = A(x + 2) + B(x + 1) = Ax + 2A + Bx + B$$

Bunun sonucu, x 'in katsayılarının eşit olması ve $3=A+B$ ve katsayıların birbirine eşit olması için, $4=2A+B$ olmak zorunda. Bu iki eş zamanlı denklem A ve B 'yi verecek şekilde çözülebilir.

Paydanın derecesi, paydan küçük veya eşit olduğu zaman, sonuç, kalan kesir kısmının paydasının derecesi payın derecesinden büyük olan terimlerin toplamı olana kadar, payda paya bölünmelidir.

Başlangıç ve son değer teoremleri

Bir fonksiyonun *başlangıç değeri*, o fonksiyonun 0 zamanındaki değeri ve *son değeri* de zaman sonsuz olduğundaki değeridir. Çoğu zaman, sistemlerin başlangıç ve son değerlerini belirlememiz gerekir; mesela bir elektrik devresi için diyelim ki bir adım girdi var; bu durumda son değerimiz, çoğu zaman *kararlı-hal değeri* olarak adlandırılır. Başlangıç ve son değer teoremleri, ters dönüşümünü bulmak zorunda olmaksızın, başlangıç ve son değerlerini, Laplace dönüşümünden bulmamızı sağlar.

$f(t)$ 'nin Laplace dönüşümü, denklem [25]'te verildiği üzere, aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

ve bu nedenle:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} f(t) dt \quad [46]$$

parçalı integral alma yöntemiyle aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = \left[e^{-st}f(t)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-se^{-st})f(t)dt = -f(0) + sF(s) \quad [47]$$

s sonsuza giderken, e^{-st} sıfıra gider. Böylece, denklem [46]'nın sonucu olarak, s sonsuza giderken, $\mathcal{L}\{df(t)/dt\}$ sıfıra gider. Bu sebeple, denklem [47] aşağıdaki bağıntıyı verir:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [-f(0) + sF(s)] = 0$$

ve bu nedenle:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0)$$

Fakat $f(0)$, fonksiyonun $t=0$ anındaki başlangıç değeridir. Bunun sonucu, limitinin olması koşuluyla, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad [48]$$

Bu ifade, *başlangıç değer teoremi* olarak bilinir.

Şimdi de denklem [47]'yi sıfıra giderken düşünelim. O zaman e^{-st} 1'e gider ve bu nedenle:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} f(t) dt \right] = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) dt$$

Bu integrali aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{d}{dt} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)]$$

Bu nedenle aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [-f(0) + sF(s)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)]$$

ve bu nedenle, limitinin olması koşuluyla aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad [49]$$

Bu *son değer teoremi* olarak adlandırılır.

Sarınım teoremi

Lineerlik özelliği, bir dizi dönüşümün toplamının ters dönüşümünün, ayrı terimlerin ters dönüşümlerinin toplamı olduğunu söyler. Fakat bir çarpımın ters dönüşümü için ne söylenebilir? Bu çarpanların ters dönüşümlerinin çarpımı mıdır? Bu sorunun cevabı, bir sonraki örnekte de görüleceği üzere, hayırdır. $1/s^2$ 'nin ters dönüşümünü düşünün. Bunun ters dönüşümü t^2 'dir. Fakat $1/s^2$ 'yi $1/s$ ve $1/s$ 'in çarpımı şeklinde düşünseydik ne olacaktı. $1/s$ 'in ters dönüşümü t 'dir ve böylece, $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\}$ ve $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\}$ 'in çarpımı, $1 \times 1 = 1$ olacaktı ki bu da kesinlikle doğru cevap t^2 'ye eşit değil.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} \neq \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \quad [50]$$

Eğer $F(s)$, $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümü ve ayrıca $G(s)$ 'de $g(t)$ 'nin Laplace dönüşümü ise; iki Laplace dönüşümünün çarpımı, iki fonksiyon, $f(t)$ ve $g(t)$ 'nin sarınımı/konvolusyon'u olarak adlandırılır. Aşağıdaki şekilde yazılır:

$$F(s)G(s) = \mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} \quad [51]$$

Böylece:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)*g(t) \quad [52]$$

Bunun da aşağıdaki ifadeye eşit olduğu gösterilebilir:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad [53]$$

Bu, *sarınım/konvolusyon teoremi* olarak bilinir. Denklem [53]'teki t ve τ arasındaki ayrıma dikkat edin, integral τ 'ye göre alınıyor, integral göz önüne alındığında, t burada sabittir.

Örnek olarak, $1/s^2(s-1)$ 'in ters Laplace dönüşümünü düşünün. Bunu iki terimin, $F(s)=1/s^2$ ve $G(s)=1/(s-1)$, çarpımı olarak düşünün. Bunlar $f(t)=t$ ve $g(t)=e^t$ 'yi verir. Böylece denklem [53]'ü kullanarak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\} &= \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau \\ &= e^t \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau = e^t [-\tau e^{-\tau} - e^{-\tau}]_0^t \\ &= e^t (-te^{-t} - e^{-t} + 1) = e^t - t - 1 \end{aligned}$$

Laplace dönüşümü kullanarak belirlenen tepki

Transfer fonksiyonlarının diferansiyel denklemlerden ve bundan dolayı da sistemlerin tepkilerinin girdi sinyallerinden belirlendiğini düşünün.

Birinci-derece sistemler

Genelde, birinci-derece bir sistem için, $y(t)$ çıktısı, $x(t)$ girdisi ile aşağıdaki formda bir diferansiyel denklem ile bağlantılıdır:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x \quad [54]$$

Denklem [54]'ün Laplace dönüşümünü alırsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$a_1[sY(s) - y(0)] + a_0 Y(s) = b_0 X(s)$$

Başlangıç değerleri sıfır olursa, transfer fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

Bu da, genel olarak, G kararlı-hal kazancı ve $a_1/a_0 = \tau$, zaman sabiti olmak üzere, aşağıdaki formda yazılabilir:

$$G(s) = \frac{b_0 / a_0}{(a_1 / a_0)s + 1} \quad [55]$$

Bir örnek olarak, $G/(\tau s + 1)$ transfer fonksiyonuna sahip birinci-derece bir sistemin, birim adım girdisine verdiği tepkiyi düşünün. Birim adım girdisi, $1/s$ Laplace dönüşümüne sahiptir, böylece:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{G}{s(\tau s + 1)} = G \frac{1/\tau}{s(s + 1/\tau)}$$

Çıktı y 'yi, zamana bağlı bir fonksiyon olarak bulabilmek için, $Y(s)$ 'in ters Laplace dönüşümüne ihtiyacımız var. Dönüşüm, $a=1/\tau$ olmak üzere, G sabiti ve $a/s(s+a)$ çarpımı formunda bir dönüşümdür. Tablo 2.2, bu tip bir dönüşüme sahip bir fonksiyonun $1-e^{-at}$ olduğunu gösterir ve böylece:

$$y(t) = G(1 - e^{-t/\tau}) \quad [56]$$

Daha ileri bir örnek için, yukarıdaki sistemin bir birim darbe girdisine, $t=0$ anında verdiği tepkiyi düşünün. Bu tip bir darbe için Laplace dönüşümü 1 'dir ve bu nedenle:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{G}{s+1/\tau} = G \frac{1/\tau}{s+1/\tau}$$

dönüşüm, $a=1/\tau$ olmak üzere, $a/s(s+a)$ ile sabit G 'nin çarpımıdır. Tablo 2.2, bu tip bir dönüşüme sahip fonksiyonun e^{-at} olduğunu gösterir ve böylece:

$$y(t) = Ge^{-t/\tau} \quad [57]$$

İkinci-derece sistemler

Genelde, birinci-derece bir sistem için, $y(t)$ çıktısı, $x(t)$ girdisi ile aşağıdaki formda bir diferansiyel denklem ile bağlantılıdır:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x \quad [58]$$

Bütün başlangıç değerleri sıfır olmak üzere, Laplace dönüşümünü alırsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_0 X(s)$$

Bu nedenle:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad [59]$$

Bu da çoğu zaman, doğal açısal frekans $\omega_n = \sqrt{a_0/a_2}$ ve sönümleme faktörü $\zeta = a_1/2\sqrt{a_0a_2}$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde yazılır:

$$G(s) = \frac{b_0/a_0}{(a_2/a_0)s^2 + (a_1/a_0)s + 1} = \frac{(b_0/a_0)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad [60]$$

Bir örnek olarak, transfer fonksiyonu denklem [60]'taki gibi olan bir ikinci-derece sistemin, bir birim adım girdisine verdiği tepkiyi düşünün. Birim adım girdisi, $1/s$ Laplace dönüşümüne sahiptir, çıktı dönüşümü $Y(s)$ aşağıdaki gibidir:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{(b_0/a_0)\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad [61]$$

Bu da, p_1 ve p_2 denklemin kökleri olmak üzere, aşağıdaki formda yazılabilir:

$$Y(s) = \frac{(b_0/a_0)\omega_n^2}{s(s + p_1)(s + p_2)} \quad [62]$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Böylece:

$$p = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad [63]$$

$\zeta > 1$ için, karekök terimi reeldir ve $Y(s)$ 'in ters Laplace dönüşümü, kısmi kesirler kullanılarak, yukarıdaki denklemi sadeleştirme yoluyla elde edilebilir:

$$\frac{1}{s(s + p_1)(s + p_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + p_1} + \frac{C}{s + p_2}$$

Bu da $A(s + p_1)(s + p_2) + Bs(s + p_2) + Cs(s + p_1) = 1$ eşitliğini verir ve bu nedenle, $A = 1/p_1 p_2$, $B = -1/p_1(p_2 - p_1)$ ve $C = 1/p_2(p_2 - p_1)$ bulunur. Bundan dolayı:

$$y(t) = \frac{b_0\omega_n^2}{p_1 p_2} \left(1 - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{-p_1 t} + \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{-p_2 t} \right) \quad [64]$$

Tepki üst sönümlüdür.

$\zeta=1$ için, $p_1=p_2=-\omega_n$ bulunur. O zaman da ters dönüşüm aşağıdaki şekle dönüşür:

$$Y(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}$$

Bu denklem, kısmi kesirler yoluyla aşağıdaki ifadeyi verecek şekilde sadeleştirilebilir:

$$Y(s) = b_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s + \omega_n)} + \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \right]$$

Ve bu nedenle:

$$y(t) = b_0(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}) \quad [65]$$

Tepki kiritik sönümlüdür.

$\zeta < 1$ için, kökler sanaldır. Kısmi kesir kullanarak sadeleştirme yoluyla veya tablo 3.2’de verilen standart bir dönüşümü kullanarak, ters dönüşümün, $\cos \phi = \zeta$ olmak üzere, aşağıdaki gibi ifade edildiğini buluruz:

$$y(t) = b_0 \left[1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) \right] \quad [66]$$

Tepki alt sönümlüdür.

Sistemlerin blok diyagram gösterimi

Bir transfer fonksiyonu, $X(s)$ girdi, $Y(s)$ çıktı ve transfer fonksiyonu $G(s)$ girdiyi çıktıya dönüştüren olarak kutunun içindeki işlem olmak üzere, blok diyagram olarak gösterilebilir. Blok, girdi için bir çarpımı temsil eder. Sistemlerin, bir takım alt sistemlerini de içeren, blok diyagramları, basit bir blok diyagramına dönüştürülebilir.

Seri sistemler

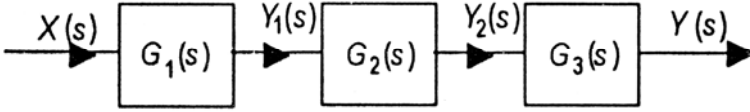
Eğer bir sistem, birbirine seri bağlanmış bir takım alt sistemlerden oluşuyorsa (Şekil 2.7), sistemin toplam transfer fonksiyonu $G(s)$ aşağıdaki gibi verilir:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y_1(s)}{X(s)} \times \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} \times \frac{Y(s)}{Y_2(s)} [67]$$

$$= G_1(s) \times G_2(s) \times G_3(s)$$

Böylece:

Seri bağlanmış elemanlardan oluşan bir sistem için toplam transfer fonksiyonu, her bir elemanın transfer fonksiyonunun çarpımıdır.



Şekil 2.7 Seri sistem elemanları

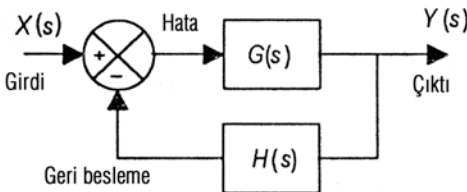
Örnek olarak, birisinin transfer fonksiyonu $1/(s+1)$, diğerinin $1/(s+2)$ olan iki elemanın seri bağlanmasından oluşmuş bir sistemin toplam transfer fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir:

$$\text{toplam transfer fonksiyonu} = \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Geri beslemeli sistemler

Negatif besleme döngüsü olan sistemler için, Figür 2.8’de gösterildiği gibi, çıktı, transfer fonksiyonu $H(s)$ olan bir sistemin, $G(s)$ sisteminin girdisinden çıkarılması yoluyla geri besleniyor olma durumu söz konusu olabilir. geri besleme sinyali $H(s)Y(s)$ ’tir ve böylece $G(s)$ sisteminin girdisi, yani hata, $X(s)-H(s)Y(s)$ ’tir. Bundan dolayı:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s) - H(s)Y(s)}$$



Şekil 2.8 *Negatif geri beslemeli sistem*

ve bu nedenle:

$$[I + G(s)H(s)]Y(s) = G(s)X(s)$$

Bu denklem de, aşağıdaki ifadeyi verecek şekilde yeniden düzenlenebilir:

$$\text{sistemin transfer fonksiyonu} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad [68]$$

Böylece:

Negatif geri beslemeli bir sistem için, toplam transfer fonksiyonu, ileri yol transfer fonksiyonunun, bir ile ileri ve geri besleme yollarının transfer fonksiyonlarının çarpımlarının toplamına bölümüdür.

Pozitif geri beslemeli bir sistem için (Figür 2.9), geri beslenen sinyal $H(s)Y(s)$ 'tir ve böylece $G(s)$ sisteminin girdisi $X(s) + H(s)Y(s)$ 'tir. Bundan dolayı:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s) + H(s)Y(s)}$$

ve bu nedenle:

$$[I - G(s)H(s)]Y(s) = G(s)X(s)$$

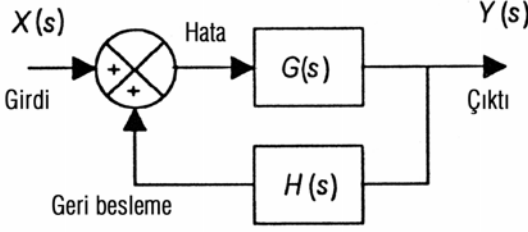
Bu denklem de, aşağıdaki ifadeyi verecek şekilde yeniden düzenlenebilir:

$$\text{sistemin transfer fonksiyonu} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} \quad [69]$$

Böylece:

Pozitif geri beslemeli bir sistem için, toplam transfer fonksiyonu, ileri yol transfer fonksiyonunun, birin ve ileri ve

geri besleme yollarının transfer fonksiyonlarının çarpımlarının farkına bölümüdür.



Şekil 2.9 Pozitif geri beslemeli sistem

Bir örnek olarak, negatif geri besleme döngü transfer fonksiyonu 4 ve ileri yol transfer fonksiyonu $2/(s+2)$ olan bir kontrol sisteminin toplam transfer fonksiyonu, aşağıdaki gibidir:

$$\text{sistemin transfer fonksiyonu} = \frac{\frac{2}{s+2}}{1 + 4 \times \frac{2}{s+2}} = \frac{2}{s+10}$$

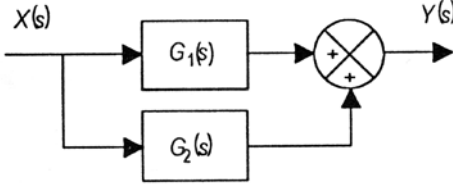
Pozitif geri besleme döngü transfer fonksiyonu 4 ve ileri yol transfer fonksiyonu $2/(s+2)$ olan bir kontrol sisteminin toplam transfer fonksiyonu, aşağıdaki gibidir:

$$\text{sistemin transfer fonksiyonu} = \frac{\frac{2}{s+2}}{1 - 4 \times \frac{2}{s+2}} = \frac{2}{s-6}$$

İleri beslemeli döngüler

Figür 2.10 ile gösterilen sitemi düşünelim. Bu ileri besleme döngüsüne sahiptir ve $Y(s)$, $G_1(s)X(s)$ ile $G_2(s)X(x)$ çıktıların toplamıdır. Böylece, ileri besleme döngüsü, aşağıdaki transfer fonksiyonuna sahip tek bir sistem olarak gösterilebilir:

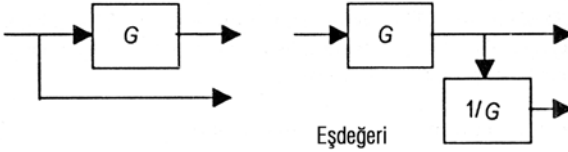
$$\text{sistemin transfer fonksiyonu} = G_1(s) + G_2(s) \quad [70]$$



Şekil 2.10 İleri besleme döngüsü

Şekil 2.11’de gösterilen ileri besleme sistemi için, çıktı $Y(s)$, $G_1(s)X(s)$ eksi $G_2(s)X(s)$ ’dir. Böylece, ileri besleme döngüsü, aşağıdaki transfer fonksiyonuna sahip tek bir sistem olarak gösterilebilir:

$$\text{sistemin transfer fonksiyonu} = G_1(s) - G_2(s) \quad [71]$$

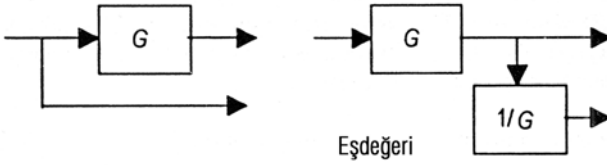


Şekil 2.11 İleri besleme döngüsü

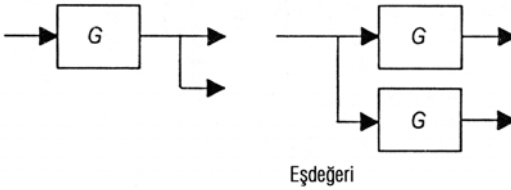
Ayrılma ve toplama noktalarını taşımak

Blok diyagramlarını sadeleştirme anlamında, çoğu zaman ayrılma noktalarını ve toplama köşelerini hareket ettirmek gerekir. Buradan sonraki şekiller (2.12-2.17 Figürleri), bu tip hareketler için gerekli

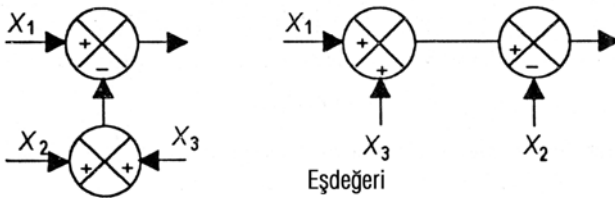
temel kuralları gösteriyor ki bu tip hareketlerin hepsindeki esas kural, eşdeğer blok diyagramın aynı çıktı sinyali vermesidir.



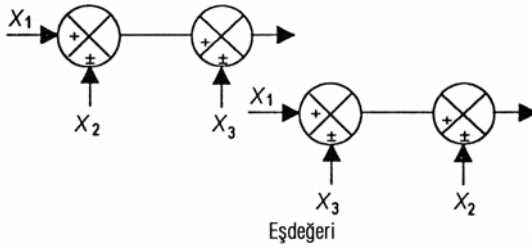
Şekil 2.12 Ayrılma noktasının bloğun önüne taşınması



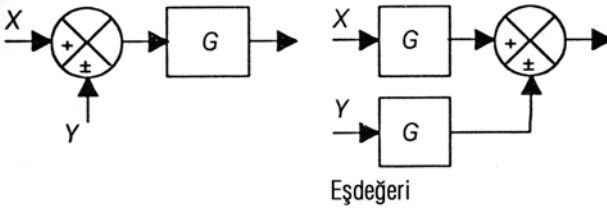
Şekil 2.13 Ayrılma noktasının bloğun arkasına taşınması



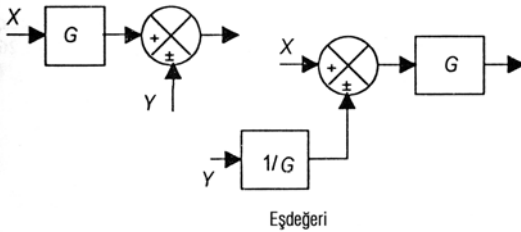
Şekil 2.14 Toplama noktalarının tekrar düzenlenmesi



Şekil 2.15 Toplama noktalarının yer değiştirilmesi



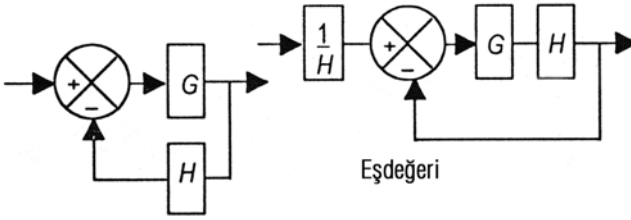
Şekil 2.16 Bir toplama noktasının bir bloğun önüne getirilmesi

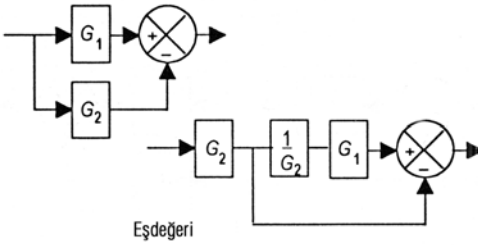


Şekil 2.17 Bir toplama noktasının bir bloğun arkasına getirilmesi

Geri besleme ve ileri besleme yollarını değiştirme

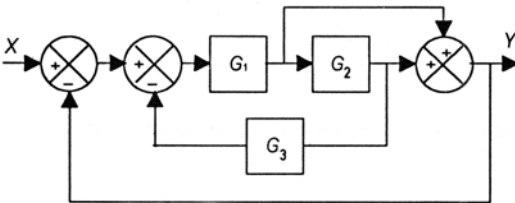
2.18 ve 2.19 Şekilleri, ileri besleme ve geri besleme yollarını değiştirmede kullanılan blok sadeleştirme tekniklerini gösteriyorlar.


Figür 3.18 Bir bloğun geri besleme yolundan çıkarılması

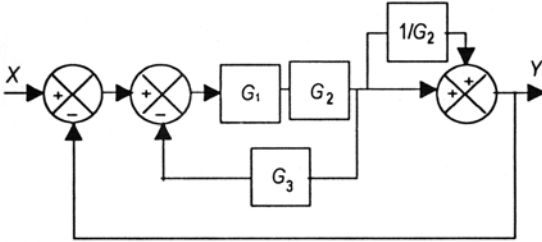

Figür 3.19 Bir bloğun ileri besleme yolundan çıkarılması

Blok sadeleştirme gösterimi

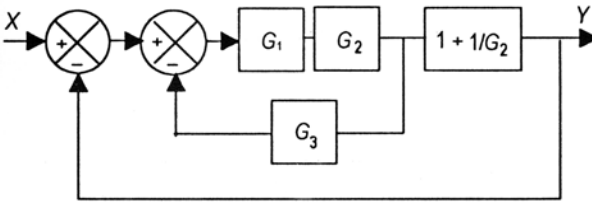
Blok sadeleştirme tekniklerinin kullanımına örnek olarak, Figür 2.20'de gösterilen sistemi düşünün. 2.21-2.26 Şekilleri, sadeleştirmedeki çeşitli aşamaları gösteriyor.



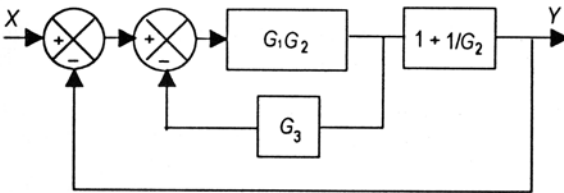
Şekil 2.20 Sadeleştirilecek devre



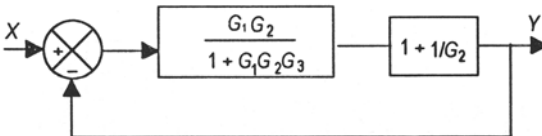
Şekil 2.21 Bir ayrılma noktasının taşınması

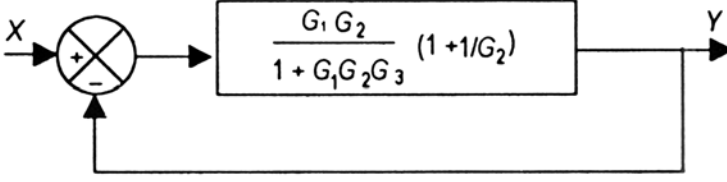
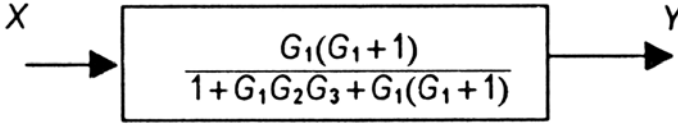


Şekil 2.22 Bir ileri besleme döngüsünün elimine edilmesi



Şekil 2.23 Seri elemanların sadeleştirilmesi

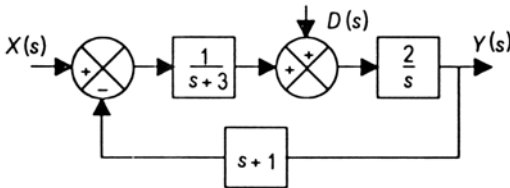


Şekil 2.24 Bir geri besleme elemanının sadeleştirilmesi**Şekil 2.25** Seri elemanların sadeleştirilmesi**Şekil 2.26** Negatif geri beslemenin sadeleştirilmesi**Çoklu girdiler**

Bir sisteme birden fazla girdi olduğu zaman, süperpozisyon prosedürü uygulanabilir. Böylece:

- 1 Biri haricindeki tüm girdileri sıfır yapın.
- 2 Sıfır olmayan bu tek girdiye karşılık gelen çıktıyı bulun.
- 3 Yukarıdaki aşamaları sıradaki her bir girdi için tekrar edin.
- 4 Sistemin toplam çıktısı, her bir girdi için bulunan çıktıların cebirsel toplamıdır.

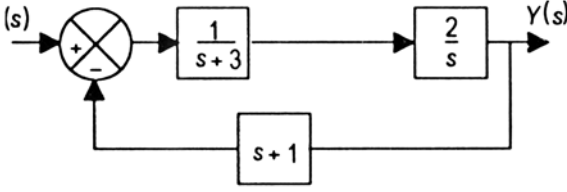
Yukarıdaki prosedürü, örneklemek için, Şekil 2.27’de gösterilen, dış etki girdisi olan, sistemi düşünün.



Şekil 227 Dış etken girdisine sahip bir sistem

$D(s)$ 'i sıfır yaparsak, Şekil 2.28'de gösterilen sistemi elde ederiz ve çıktı aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s(s+3)+2(s+1)} \quad [72]$$

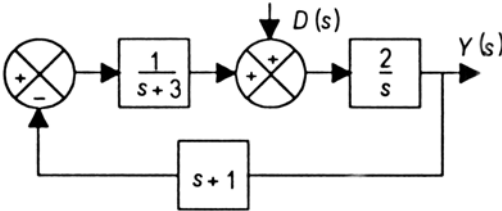
**Şekil 2.28** Dış etken girdisi sıfıra eşitlenmesi

Eğer şimdi de $X(s)$ 'i sıfır yaparsak, şekil 2.29'da gösterilen sistemi elde ederiz. Bu, ileri yol transfer fonksiyonu $2/s$, pozitif geri besleme transfer fonksiyonu $(1/s + 3)[- (s+1)]$ olan bir sistemdir. Bu sistem aşağıdaki çıktıyı verir:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{2(s+3)}{s(s+3)+2(s+1)} \quad [73]$$

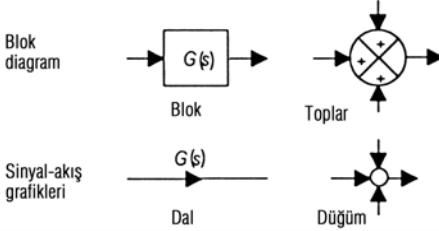
Toplam çıktı, her bir girdiye karşılık gelen çıktıların toplamıdır, yani

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+3)+2(s+1)} X(s) + \frac{2(s+3)}{s(s+3)+2(s+1)} D(s) \quad [74]$$

**Şekil 2.29** Girdinin sıfıra eşitlendiği sistem

Sinyal-akış grafikleri

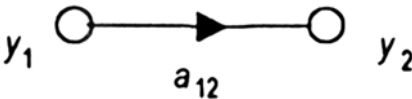
Bir sinyal-akış grafiği, blok diyagramın sadeleştirilmiş versiyonu olarak düşünülebilir. Bu, girdi-çıkı ilişkilerini resmetmenin grafiksel bir metodudur. Sinyal-akış grafiklerinin iki elemanı vardır, dal ve düğüm. Dal, bloğun eşdeğeridir ve düğüm, bütün girdilerin artı işaretli olduğu toplama sembolünün eşdeğeridir (Şekil 2.30). Her bir dalda, oklarla gösterilen yönler vardır ve bir sinyal bir dal üzerinden ancak okla gösterilen yönde geçebilir. Herhangi bir düğümdeki sinyal, düğümdeki bütün girdilerin toplamıdır.



Şekil 2.30 Blok diyagramlar ve sinyal-akış grafikleri

Bir sinyal, bir dal boyunca, bir düğümden diğerine, okla gösterilen yönde hareket eder. Bu işlem boyunca, sinyal, o dal üzerinde belirtilen kazançla çarpılır. Bu nedenle, Şekil 2.31’de belirtilen dal için, a_{12} düğüm 1 ve 2 arasındaki dalın kazancı olmak üzere, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

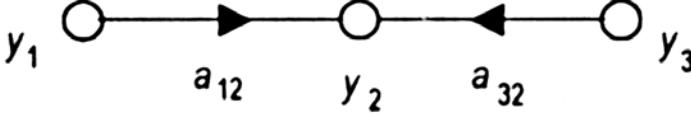
$$y_2 = a_{12}y_1 \quad [75]$$



Şekil 2.31 Sinyal-akış grafiği

Şekil 2.32’de belirtilen dallar ve düğümler için, a_{32} düğüm 3 ve 2 arasındaki kolun kazancı olmak üzere, aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3 \quad [76]$$

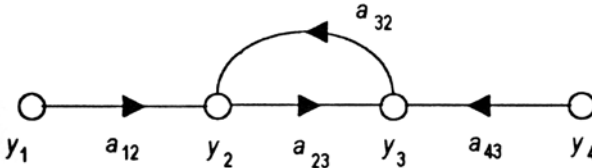


Şekil 2.32 Sinyal-akış grafiği

Şekil 2.33’de belirtilen dallar ve düğümler için, aşağıdaki ifadeleri buluruz:

$$y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3 \quad [77]$$

$$y_3 = a_{23}y_2 + a_{43}y_4 \quad [78]$$



Şekil 2.33 Sinyal-akış grafiği

Dal ve düğümlere ek olarak, aşağıdaki terimler de, sinyal-akış grafiklerini açıklamada kullanılır:

- 1 *Girdi düğümü(kaynak)*
Bu, sadece, çıktı dalları olan bir düğümdür.
- 2 *Çıktı düğümü(batak)*
Bu, sadece, girdi dalları olan bir düğümdür.
- 3 *Hatl*

Bir hat, bağlantılı dallar üzerinden oklar yönünde, hiç bir düğümden bir defadan fazla geçmemek koşuluyla oluşturulan güzergahlardır.

4 *İleri hat/yol*

Bu, girdi düğümünde başlayıp, çıktı düğümünde biten, bir düğümden birden fazla geçmemek koşuluyla oluşturulan hattır.

5 *Yol kazancı*

Bu, üzerinden gidilen hat boyunca geçilen dal kazançlarının çarpımıdır.

6 *İleri-yol kazancı*

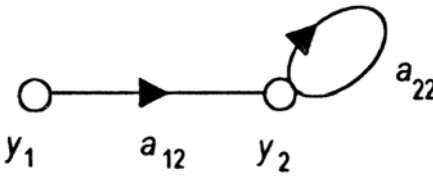
Bu, ileri bir yolun, yol kazancıdır.

7 *Döngü*

Döngü, aynı düğümde başlayıp-biten yoldur. Şekil 2.33'te, düğüm 2'de başlayan, düğüm 2'den 3'e giden dal üzerinden devam eden ve tekrar düğüm 2'ye dönen bir döngü vardır. bir başka örnek olarak, Şekil 2.34'te gösterilen sinyal-akış grafiğinde, döngü için $y_2 = a_{22}y_2$ 'dir ve bu nedenle:

$$y_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2$$

[79]



Şekil 2.34 Bir döngüye sahip sinyal-akış grafiği

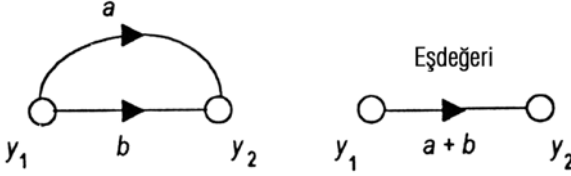
8 *Döngü kazancı*

Bu, bir döngünün yol kazancıdır.

Sinyal-akış cebiri

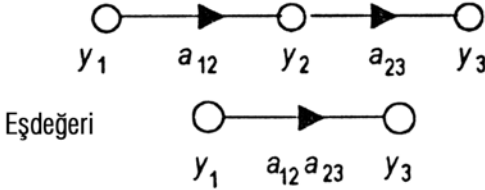
Aşağıdaki kurallar, kullanabileceğimiz, temel kurallardır:

- İki düğümü birleştiren aynı yönlü paralel dallar, kazancı dalların kazançları toplamına eşit olan tek bir dal ile yer değiştirebilir (Şekil 2.35).



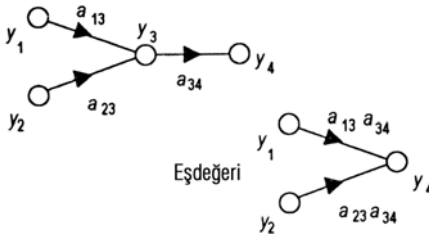
Şekil 2.35 Paralel dallar

- Hepsi aynı yönde olan dalların seri bağlantısı, kazancı, dalların kazançları çarpımına eşit olan tek bir dal ile yer değiştirebilir.(Şekil 2.36)



Şekil 2.36 Seri dallar

- Seri bağlama kuralı, Şekil 2.37’de gösterilen sadeleştirmeyi verecek şekilde uygulanabilir.



Şekil 2.37 *Dal sadeleştirilmesi*

Sinyal-akış grafiklerinin oluşturulması

Sinyal-akış grafiklerinin oluşturulması, düğüm olacak değişkenleri ve bu değişkenler arasındaki ilişkileri tanımlayan denklem setini belirlemeyi içerir ve daha sonra bunlar çeşitli dal ve döngülerin oluşturulmasına imkan tanır.

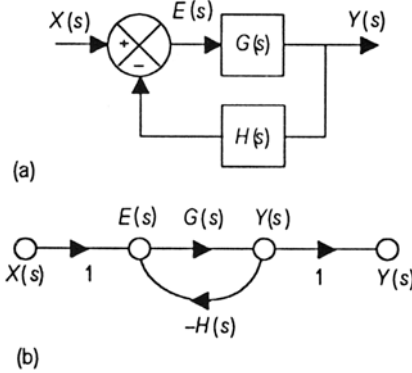
Bir örnek olarak, bir geri besleme sistemini gösteren şekil 2.38(a)'yı düşünün. Değişkenler, $Y(s)$, $X(s)$ ve $E(s)$ 'tir ve bu nedenle, bunlar düğümleri oluştururlar. Düğümlerdeki sinyallerin denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$E(s) = X(s) - H(s)Y(s) \quad [80]$$

Ve

$$Y(s) = G(s)E(s) \quad [81]$$

Bunun sonucunda, $E(s)$ düğümü, birisi $X(s)$ düğümünü 1 ile çarpan ve diğeri $Y(s)$ düğümünü $-H(s)$ ile çarpan, iki tane girdi dalına sahip olmalıdır. $Y(s)$ düğümü, $E(s)$ düğümünü $G(s)$ ile çarpan bir girdi dalına sahip olmalıdır. Şekil 2.38(b), sonuçta oluşan sinyal-akış grafiğini gösteriyor.



Şekil 2.38 *Geri besleme sistemi*

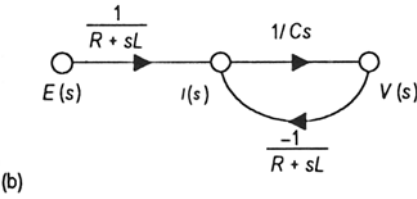
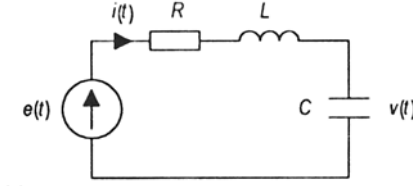
Daha ileri bir örnek için, Şekil 2.39’da gösterilen RLC devresinin sinyal-akış grafiğini belirlemeyi düşünün. Değişkenler ve böylece düğümler, $E(s)$, $I(s)$ ve $V(s)$ ’tir; $V(s)$ burada kapasitör üzerindeki çıktı voltajıdır. Tanımlama denklemlerini elde etmek için, $e(t)$, $i(t)$ ve $v(t)$ ’yi ilişkilendiren diferansiyel denklemi elde edebiliriz.

Devreye Kirchoff’un voltaj kanununu uygularsak, bize aşağıdaki ifadeyi verir:

$$e(t) = Ri(t) + v(t) + L \frac{dv(t)}{dt} \quad [82]$$

Akım için, aynı zamanda aşağıdakini elde ederiz:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad [83]$$



Şekil 2.39 RLC devresi

Bütün başlangıç değerlerini sıfır kabul ederek, Laplace dönüşümlerini ele alırsak; aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$E(s) = RI(s) + V(s) + sLI(s) \quad [84]$$

$$I(s) = sCV(s) \quad [85]$$

Bunlar da aşağıdaki denklemi verir:

$$I(s) = \frac{1}{R+sL}E(s) - \frac{1}{R-sL}V(s) \quad [86]$$

Böylece, denklem [86], $I(s)$ düğümü için; $E(s)$ düğümünden gelen girdileri $1/(R+sL)$ ile çarpan bir dal; $V(s)$ üzerinden gelen girdileri $-1/(R-sL)$ ile çarpan bir dal olduğunu gösteriyor. $V(s)$ düğümünün girdisi $I(s)$ 'in $1/sC$ ile çarpımıdır. Figür 2.39(b), sinyal-akış grafiğini gösteriyor.

Genel kazanç formülü

Toplam transfer fonksiyonu, bir sinyal-akış grafiğinden, toplam kazancı belirlemek için her bir dal üzerinde sistematik biçimde çalışma yoluyla çıkarılabilir. Daha basit bir alternatif *Mason'un genel kazanç formülünü* kullanmaktır:

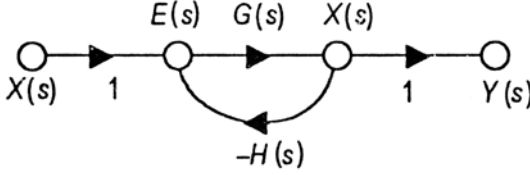
$$T = \frac{y_{out}}{y_{in}} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^N T_k \Delta_k \quad [87]$$

Burada, T ; girdi düğümü y_{in} ve çıktı düğümü y_{out} arasındaki toplam kazanç, N ; y_{in} ve y_{out} arasındaki ileri yolların toplam sayısı ve T_k ; y_{in} ve y_{out} arasındaki k indeksli ileri yolunun kazancı ve Δ aşağıda tanımlandığı gibidir:

$$\Delta = 1 - (\text{bütün döngü kazançlarının toplamı}) + (\text{birbirine değmeyen döngü çiftlerinin tamamının kazanç çarpımlarının toplamı}) - (\text{birbirine değmeyen üçlü döngülerin tamamının kazanç çarpımlarının toplamı}) + (\text{birbirine değmeyen dördü döngülerin tamamının kazanç çarpımlarının toplamı}) - \dots \quad [88]$$

Δ_k , sinyal-akış grafiğinde, k indeksli ileri yoluna değmeyen parçasının, Δ değeridir. Kazanç formülü, sadece, bir çift girdi ve çıktı düğümü için uygulanabilir. Sinyal-akış grafikleri ve blok diyagramları arasındaki benzerlikten dolayı, kazanç formülü her ikisi içinde kullanılabilir.

Genel kazanç formülünün kullanımına bir örnek olarak, Şekil 2.40'ta yer alan sinyal-akış grafiği ile tanımlanan basit geri besleme kontrol sistemine uygulamasını düşünün (blok diyagramı için Şekil 2.38'e bakınız).



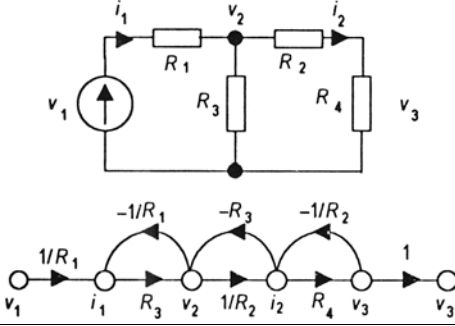
Şekil 2.40 Geri besleme sistemi

Girdi değişkeni $X(s)$ ve çıktı değişkeni $Y(s)$ 'tir. Bunlar arasında sadece bir tane ileri yol vardır ve yol kazancı $T_I=G(s)$ 'tir. Sadece bir döngü vardır ve bu $-G(s)H(s)$ döngü kazancına sahiptir. İleri yol bu tek döngü ile birbirine bitişiktir; böylece, $\Delta_I=1$ ve $\Delta=1 - (-G(s)H(s))$ 'tir. Bundan dolayı:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{T_I \Delta_I}{\Delta} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad [89]$$

Daha ileri bir örnek için, Şekil 2.41'deki devrenin sinyal-akış grafiğine uygulamasını düşünün. Sinyal-akış grafiği, beş değişken, v_1 , v_2 , v_3 , i_1 ve i_2 , olduğu göz önüne alınır ve Kirchoff'un voltaj ve akım kanunları uygulanırsa aşağıdaki ifadeyi verecek şekilde bulunur:

$$i_1 = \frac{1}{R_1} v_1 - \frac{1}{R_2} v_2 \quad [90]$$



Şekil 2.41 Bir devre ve sinyâl-akış grafiği

$$v_2 = R_3 i_1 - R_3 i_2 \quad [91]$$

$$i_2 = \frac{1}{R_2} v_2 - \frac{1}{R_2} v_3 \quad [92]$$

$$v_3 = R_4 i_2 \quad [93]$$

Sadece kazancı $R_3 R_4 / R_1 R_2$ olan bir tane ileri yol vardır ve kazançları $-R_3 / R_1$, $-R_3 / R_2$, $-R_4 / R_2$ olan üç tane döngü bulunur. İki tane birbirine değmeyen döngü vardır, ilki ve sonuncusu... Bu nedenle, birbirine değmeyen iki döngünün kazanç çarpımı $R_3 R_4 / R_1 R_2$ 'dir. İkidenden fazla, bir birine değmeyen döngü kombinasyonu yoktur. Böylece:

$$\Delta = 1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_4}{R_1} + \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2} \quad [94]$$

Bütün döngüler, ileri yol üzerinde olduklarından, $\Delta_1 = 1$ 'dir. Bu nedenle, genel kazanç formülü uygulanması aşağıdaki ifadeyi verir:

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4} \quad [95]$$

3. Kutup ve sıfır DEĞERLERİ

Kutup ve sıfır değerleri

Lineer bir sistemin transfer fonksiyonu, genelde $a_0, a_1, \dots, a_m$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n$ sistemin modeli olan diferansiyel denklemdeki reel katsayılar olmak üzere, iki tane s 'e bağlı polinomun oranıdır:

$$G(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + a_{m-2} s^{m-2} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0} \quad [1]$$

Bu denklem, pay ve paydanın kökleri şeklinde, K sabit bir çarpan veya kazanç faktörü, $z_1, z_2, \dots, z_m$ payın kökleri ve $p_1, p_2, \dots, p_n$ paydanın kökleri olmak üzere, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad [2]$$

Yukarıdaki bağıntıda payın kökleri *sıfırlar* ve paydanın kökleri ise *kutuplar* olarak adlandırılır.

Sıfır değerleri, payı; dolayısıyla transfer fonksiyonunu sıfır yapan s değerleridir. *Kutup* değerleri, paydayı sıfır yapan, dolayısıyla transfer fonksiyonunu tanımsız yapan s değerleridir. Örnek olarak, eğer aşağıdaki gibi bir transfer fonksiyonumuz varsa:

$$G(s) = \frac{s+1}{s}$$

o zaman, sadece $s = -1$ 'de bir sıfır vardır; bu değer, payı sıfır yapar, ve $s=0$ 'da bir tane kutup değeri bulunur; bu değer de paydayı sıfır yapar. Bir başka örnek olarak, aşağıdaki fonksiyonu düşünelim:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 3}$$

Bu ifadede, hiç sıfır değeri bulunmaz. Kutuplar, $s^2+s+3=0$ denkleminin kökleridir ve bundan dolayı kutup değerleri aşağıdaki gibidir:

$$s = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2}$$
$$s = 0.5 \pm j1.66$$

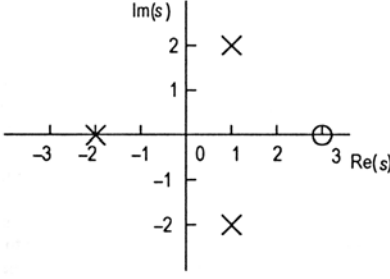
Bu sebeple iki tane kutup değeri vardır, $0.5+j1.66$ ve $0.5-j1.66$.

Kutup ve sıfır değerleri ya *reeldirler* ya da *kompleks eşlenikler* şeklinde bulunurlar. Genel olarak, kutup ve sıfırlar, σ reel kısım, $j\omega$ sanal kısım olmak üzere, aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$s = \sigma \pm j\omega \quad [3]$$

Sanal kısım için, ω sembolünün kullanılmasının önemi, bu bölümde daha sonra, bu terimin geçici tepki üzerindeki etkisi ve 5. bölümde de frekans tepkisi anlatıldığı zaman daha belirgin olacaktır.

Kutup-sıfır çizimleri



Şekil 3.1 Kutup-sıfır çizimi

Kutup ve sıfırlar bir Arjand diyagramı üzerine çizilebilirler; bu diyagram *s-düzlem diyagramı* olarak adlandırılır. Diyagramın eksenleri, s 'in reel ve sanal kısımlarıdır. Kutuplar, s -düzleminde, küçük çarpılar şeklinde çizilirler, sıfırlar da küçük daireler şeklinde. Çizimin sol tarafındaki kutup ve sıfırlar, negatif reel kısımlara sahiptirler ve çizimin sağ tarafında kalanlar ise pozitif reel kısımlara sahiptirler. Yukarıda Şekil 3.1, kutupları -2 ve $1 \pm j2$ olan ve 3 'te bir sıfırı olan bir transfer fonksiyonunun anlattığımız tarzda bir diyagramını gösteriyor. Sabit çarpan dışında, bir kutup-sıfır çizimi, transfer fonksiyonunun içerdiği bütün bilgiyi içerir.

Kutup konumu ve geçici tepki

Aşağıdaki sistem durumlarını düşünün:

- 1 Ayrı reel kökler
- 2 Ayrı kompleks kökler
- 3 Tekrar eden kökler

Ayrı reel kutuplar

Transfer fonksiyonunun genel formuna sahip, $N(s)$ pay polinomu ve sadece reel kutuplar olmak üzere, yani sadece $s = \sigma$ için, bir sistem düşünelim:

$$G(s) = K \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad [4]$$

Eğer bu sistem bir birim darbe girdisine maruz kalırsa, sistemin tepkisi $Y(s)$ aşağıdaki gibi olacaktır:

$$Y(s) = K \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)} \times 1 \quad [5]$$

Denklem [5]'i bir terim serisine genişletmek için, kısmi kesirleri kullanabiliriz:

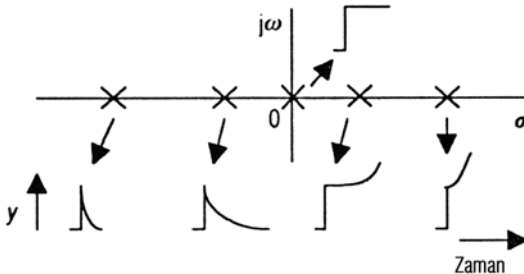
$$Y(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n} \quad [6]$$

Bu terimleri tekrar zaman düzlemine dönüştürürsek, birim darbe girdisine karşılık gelen $y(t)$ tepkisi aşağıdaki şekliyle bulunur:

$$y(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t} \quad [7]$$

Böylece, sistem transfer fonksiyonundaki her bir reel kutup, sistemin darbe girdisine verdiği tepkinin denkleminde üstel bir terime karşılık gelir. Sabit değerleri, $K_1, K_2, \dots, K_n$, paydan etkilenirler fakat üssel terimler sadece kutup pozisyonlarına bağlıdır.

Bir geçici tepkinin zamanla yok olması için, kutupların negatif olması gerekir. O halde, kutuplar, kutup-sıfır çiziminin negatif reel ekseninde olmalıdırlar. Eğer kutuplar pozitif değerlere sahipse; üssel terimler zamana bağlı olarak sonsuza kadar artarlar; kutup ne kadar pozitif olursa, büyüme hızı o kadar hızlı olur. Zamana bağlı olarak sonsuza kadar artan bir geçici terime sahip sistemler *kararsız* olarak tanımlanırlar; zamanla bütün geçici terimleri yok olan sistemler *kararlı* olarak tanımlanırlar. Şekil 3.2, s -düzleminde, farklı ayırık reel kutup pozisyonlarına göre, geçici tepkilerin genel formunu gösteriyor. Bir kutbun, s -düzleminin orijininde yer alan özel durumu için, yani $s=0$ için, $y(t)=Ke^0=K$ 'dır. Geçici tepki, zamanla ne artan ne de azalan, bir katsayıdır.



Şekil 3.2 Farklı ayrı reel kutuplar için geçici tepkiler

Birinci-derece bir sistemin transfer fonksiyonunun genel formu, τ zaman sabiti olmak üzere, aşağıdaki gibi olacaktır:

$$G(s) = \frac{K}{s - 1} \quad [8]$$

Sistem, sadece $\sigma = -1/\tau$ 'da bir kutba sahiptir. Zaman sabiti ne kadar küçük olursa, kutup o kadar negatiftir ve bu nedenle geçici tepki de o kadar çabuk yok olur.

Ayrı kompleks kutuplar

Transfer fonksiyonunda, indirgenemeyen kuadratik faktör içeren bir sistem düşünelim. Bu sistemi, kısmi kesirlerini almak koşuluyla sadeleştirdiğimiz zaman, her bir terim, A ve B sabitleri olmak üzere, aşağıdaki gibi olacaktır (önceki bölüme bakınız):

$$G(s) = \frac{As + B}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \quad [9]$$

Bu denklem, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$G(s) = \frac{As + B}{[s + (\sigma + j\omega)][s + (\sigma - j\omega)]} \quad [10]$$

ve bu denklem de aşağıdaki kompleks eşlenik çiftine sahiptir:

$$s_1 = -(\sigma + j\omega) \text{ ve } s_2 = -(\sigma - j\omega) \quad [11]$$

Bir birim darbe girdisi için, denklem [9] aşağıdaki ifadeyi verir:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{As + B}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \times 1 \quad [12]$$

Denklem [12]'yi tersi elde edilebilecek bir forma getirmek için, aşağıdaki şekilde yazarız:

$$Y(s) = \frac{A(s + \sigma)}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{C\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \quad [13]$$

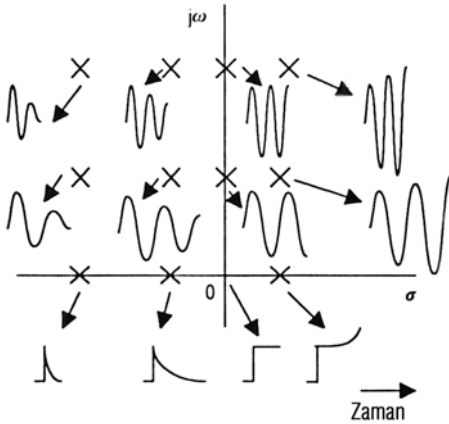
ve bu nedenle B yerine $A\sigma + C\omega$ yazarız. Böylece:

$$y(t) = Ae^{-\sigma t} \cos \omega t + Ce^{-\sigma t} \sin \omega t \quad [14]$$

$r \sin(a - \theta) = a \sin a - b \cos a$ olduğundan, denklem [14], D ve θ sabitler olmak üzere, aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir:

$$y(t) = De^{-\sigma t} \sin(\omega t - \theta) \quad [15]$$

Bu, büyüklüğü üssel terim olan ve frekansı ω olan, sinüzoidal bir salınımdır. Burada, üssel terim zamanla azalıyor ve bu nedenle salınım zamanla yok oluyor. Bunun sebebi, denklem [11]'de, kutupların, s-düzleminin sol yarısında olduklarının belirtilmesidir. Sağ yarısında bulunan kutuplar için, üssel terim zamanla artar ve bu nedenle büyüklük sonsuza kadar büyür. $\sigma=0$ olan kutuplar için, üssel terim $e^0=1$ değerine sahiptir ve bu nedenle, tepki sadece sabit katsayılı sinüzoidal bir sinyaldir. σ değerini özel bir ω değeri için arttırmak, büyüklük teriminin değişim hızını arttırır. ω değerini özel bir σ değeri için arttırmak, salınım frekansını arttırır. Şekil 3.3, kutup pozisyonunun, bir sistemin darbe girdisine verdiği tepki üzerindeki etkisini gösteriyor.



Şekil 3.3 Farklı ayırıcı reel kutuplar için geçici tepkiler

Tekrar eden kutuplar

Tekrar eden köklere sahip bir sistem düşünelim, yani s-düzleminde aynı yerde bulunan birden fazla kök. Bu durumda transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$G(s) = K \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_1)...(s-p_1)} \quad [16]$$

$N(s)$, payın s 'ye bağlı bir fonksiyon olduğunu gösterir. Eğer bu sistem, bir birim darbe girdisine maruz kalırsa, sistemin tepkisi aşağıdaki gibi olur:

$$Y(s) = G(s)X(s) = K \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_1)...(s-p_1)} \times 1 \quad [17]$$

Denklem [17]'yi bir terim serisine genişletmek için, m kökün tekrar etme sayısı olmak üzere, kısmi kesirleri kullanabiliriz:

$$Y(s) = \frac{K_m}{(s-p_1)^m} + \frac{K_{m-1}}{(s-p_1)^{m-1}} + \dots + \frac{K_1}{(s-p_1)} \quad [18]$$

Bu terimleri, tekrar zaman düzlemine dönüştürürsek, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$y(t) = K_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-p_1 t} + K_{m-1} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{-p_1 t} + \dots + K_1 e^{-p_1 t} \quad [19]$$

Bu denklem de aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$y(t) = (C_m t^{m-1} + C_{m-1} t^{m-2} + \dots + C_1) e^{-p_1 t} \quad [20]$$

Büyük zaman değerleri için, tepkide, her zaman üssel terimler baskındır ve bu nedenle, s-düzleminin sağ yarısındaki kutuplar için sonsuza artarken, sol yarısında kutuplar için, tepki zamanla yok olacaktır.

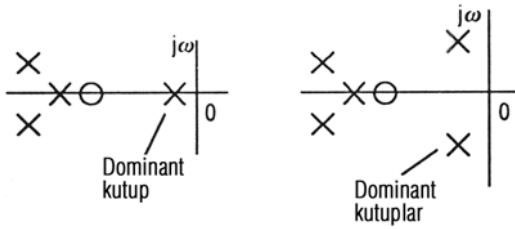
Kararlılık

Yukarıdaki, kutup pozisyonlarının, sistemin tepkisine etkisi kavramı aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Bir sistemin kararlı olması için, bütün kutupları s -düzleminin sol yarısında olmalıdır. S -düzleminin sağ tarafında kalan tek bir kutup, sistemi kararsız hale getirecektir.

Baskın kutuplar

Kararlı sistemler, s -düzleminin sol tarafında yer alan kutuplara sahiptirler ve sistemin zamana bağlı tepkisi, s -düzleminde, tepkinin kısmi kesir genişlemesi bulunarak ve bulunan her bir terimin ters Laplace dönüşümü alınarak elde edilebilir. Sonuç, her biri bir katsayı ve üssel olan bir dizi terimdir. Katsayının değeri, kutup ve sıfırların bağlı pozisyonlarına göre belirlenir ve üssel kısım, σ değeri tarafından belirlenen bir hızla, zaman içinde azalır. Her bir terimin üssel kısmı, salınım genliğinin, zaman içinde, hangi hızla azalacağını belirler. σ değeri ne kadar büyük olursa, üssel terim de zamanla o kadar hızlı azalır. Eğer özel bir terimin göreceli genliği küçükse veya σ 'nın genliği büyükse, sistemin toplam tepkisinin düşünüldüğü herhangi bir durum için, o terimi ihmal etmenin etkisi önemsizdir. Bu şekilde, bir sistemin zaman tepkisini bulmak için, kısmi kesir genişlemesinde, içinde sadece s -düzleminde orijine yakın kutupları barındıran terimleri varsayarak, makul bir yakınsama yapmak mümkündür. Bu tür kutuplar *baskın (dominant) kutuplar* olarak tanımlanır.



Şekil 3.4 Dominant kutuplar

Standart sistemler

Aşağıdaki sistemler, kutup pozisyonu ve tepkileri bakımından bazı standart sistemlerdir.

Birinci-derece

Birinci-derece bir sistem, aşağıdaki formda bir transfer fonksiyonuna sahiptir.

$$G(s) = \frac{K}{s\tau + 1} \quad [21]$$

$$= \frac{K/\tau}{s + 1/\tau} \quad [22]$$

Burada, sadece $s = -1/\tau$ 'da bir tane kutup vardır; büyük değerli bir zaman sabiti, kutbun $j\omega$ eksenine yakın olması anlamına gelir ve geçici tepkisi, zaman sabiti küçük ve kutbu $j\omega$ eksenine uzak olan bir sisteme göre daha yavaş azalır.

İntegratör

İntegratör terimi, aşağıda belirtilen formda bir transfer fonksiyonuna sahip bir sistem için kullanılır:

$$G(s) = \frac{K}{s} \quad [23]$$

Bu, s-düzleminin orijininde yer alan tek bir kutuptur. Bu tip bir sistemin tepkisi, zamanla yok olmayan sabit bir tepkiden ibarettir.

İkinci-derece

İkinci derece bir sistem, aşağıda belirtilen formda bir transfer fonksiyonuna sahiptir:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad [24]$$

kutupların yeri aşağıdaki denklemden bulunur:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad [25]$$

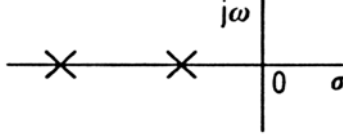
yani:

$$s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

$$= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad [26]$$

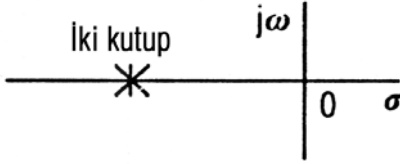
Burada, üç farklı sonuç olabilir:

- 1 $\zeta > 1$ 'den büyük olduğu zaman, karekök terimi reeldir ve her iki kök te reel ve farklıdır (Şekil 3.5). Sistem üst sönümlüdür



Şekil 3.5 Sönüm faktörü 1'den büyük

- 2 $\zeta = 1$ olduğu zaman her iki kutup da aynı pozisyondadır, $s = -\omega_n$ (Figür 3.6). Sistem, kritik sönümlüdür.



Şekil 3.6 Sönüm faktörü 1'e eşit

- 3 $\zeta < 1$ 'den küçük olduğu zaman, denklem [26]'daki karekök terimi sanaldır ve bunu aşağıda belirtildiği gibi ifade edebiliriz:

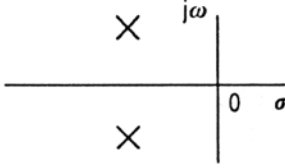
$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad [27]$$

Kutuplar, bu nedenle eşlenik pozisyonlarda yer alır (Şekil 3.7) ve tepki, genliği zamanla azalan bir salınıma sahiptir. Geçici tepki belirtilen formdadır:

$$Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t + \theta\right) \quad [28]$$

Salınım frekansı ω bu nedenle:

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad [29]$$



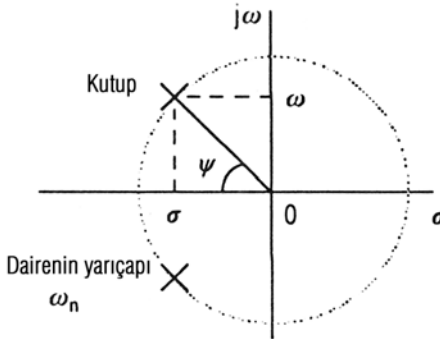
Şekil 3.7 Sönüm faktörü 1'den küçük

ve sadece kökün sanal kısmından belirlenebilir. s -düzlemi üzerinde, kutup ve orijinden geçen bir çizgi çizersek (Figür 3.8); kutbun orjinin üstünde kalan ω dik yüksekliği ve yatay uzaklık: $\sigma = -\zeta\omega_n$ olduğundan, kutbu orijine bağlayan çizginin uzunluğu aşağıda belirtildiği gibidir:

$$(length)^2 = \omega^2 + (\zeta\omega_n)^2 = \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\right)^2 + (\zeta\omega_n)^2$$

ve bu nedenle uzunluk da ω_n 'dir. Reel eksenle kutbu, orijine bağlayan çizginin arasındaki ψ açısı, aşağıda verildiği gibidir:

$$\cos \psi = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta \quad [30]$$



Şekil 3.8 Sönümsüz sistemde kutup pozisyonu

Routh-Hurwitz kriteri

Sistemlerin kararlılığı, sistemlerin kutuplarını belirleyerek ve onların s -düzlemindeki yerlerini tespit ederek belirlenebilir. Bu işlem, karakteristik denklemin köklerinin bulunmasıyla yapılır; yani karakteristik denklem, transfer fonksiyonunun paydasını Routh-Hurwitz kriteri, karakteristik denklemin köklerinin değerini tespit etmenin gerekmediği; fakat karakteristik denklemin karakteristiğini inceleyerek, köklerin s -düzleminin sağ veya sol tarafında olduğunu gösteren, kararlılığı tespit etmenin hızlı ve kolay yoludur. Transfer fonksiyonunu, sıfıra eşitleyerek elde edilen denklemdir.

Lineer bir sistemin karakteristik denkleminin genel formu, $a_0, a_1, a_2, \dots$ vs, hepsi reel sayılar olmak üzere, aşağıda belirtildiği gibidir:

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad [31]$$

İlk yapılacak test, sistemin kararlı olmasının olanaklı olup olmadığıdır. Bunun için, bu denklemin, pozitif reel kısma sahip hiç bir kökü olmamalı ve bu nedenle kararlı bir sistemi temsil edebilmelidir. Aşağıdaki koşullar gerekli fakat yeterli değildir:

- 1 Bütün katsayılar aynı işarete sahip.
- 2 Hiç bir katsayı sıfıra eşit değil.

Eğer herhangi bir katsayı negatifse; sistem, kararsız olmak durumundadır. Eğer herhangi bir katsayı, sıfır ise; sistem, en iyi ihtimalle kritik kararlıdır; yani $\sigma=0$ 'dır. Bu sebeple, örnek olarak, $s^3+2s^2+4s+5=0$ karakteristik denklemine sahip bir sistem, denklemin bütün olası katsayılarına sahiptir ve işaretleri aynı olduğundan kararlı olabilir. Buna rağmen, $s^3-2s^2+4s+5=0$ karakteristik denklemine sahip olan sistem, bütün katsayıların işaretleri aynı olmadığından kararsızdır. $s^3+4s+5=0$ karakteristik denklemine sahip bir sistem ise, katsayılarından birisi sıfır olduğundan kararsızdır.

Bir sistemin kararlı olabileceğini belirledikten sonra, ikinci bir test, sistemin gerçekten kararlı olup olmadığını belirlemek için kullanılabilir. Bu test, karakteristik denklemin katsayılarının iki satıra yazılmasını içerir.

Satır 0: s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
Satır 1: s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...

Her satırın başındaki ilk terim, satır numarasıyla gösterilir. Bir sonraki adım, aşağıda belirtilen tabloyu, verilen denklemleri kullanarak oluşturmaktır.

Satır 0: s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
Satır 1: s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
Satır 2: s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	...
Satır 3: s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	...
v.b.				
Satır n-1: s^1	y_1	y_2		
Satır n: s^0	z_1			

İkinci satırdaki elemanlar, kendisinden önce gelen iki satırın elemanlarından aşağıda gibi elde edilir:

$$b_1 = \frac{a_{n-2}a_{n-1} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad [32]$$

$$b_2 = \frac{a_{n-4}a_{n-1} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad [33]$$

$$b_3 = \frac{a_{n-6}a_{n-1} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}} \quad [34]$$

$$c_1 = \frac{a_{n-3}b_1 - a_{n-1}b_2}{b_1} \quad [35]$$

$$c_2 = \frac{a_{n-5}b_1 - a_{n-1}b_3}{b_1} \quad [36]$$

$$c_3 = \frac{a_{n-7}b_1 - a_{n-1}b_4}{b_1} \quad [37]$$

Her bir eleman, üstteki iki satırda bulunan elemanlardan, iki tanesi sol sütunda, iki tanesi hesaplanan elemanın sağındaki sütundan olmak üzere, hesaplanır. Her durumda eleman, dört elemanın determinantının negatifinin sol alt köşe elemanına bölünmesiyle elde edilir.

Tablo tamamlandığında, ilk sütundaki katsayıların işaretleri incelenir. Eğer ilk sütundaki elemanların işaretlerinin hepsi aynı ise;

karakteristik denklemin köklerinin hepsi s -düzleminin sol tarafındadır. İlk sütundaki işaret değişimlerinin sayısı s -düzleminin sağ tarafında bulunan kök sayısına eşittir.

Yukarıdakini örnekleme için, paydası $2s^4+3s^3+5s^2+2s+6$ olan transfer fonksiyonunu düşünelim. Bütün katsayıları var ve işaretlerinin hepsi aynı olduğundan, sistem kararlı olabilir. Tablo aşağıdaki gibidir:

Satır 0: s^4	2	5	6
Satır 1: s^3	3	2	
Satır 2: s^2	11/3	6	
Satır 3: s^1	-32/11		
Satır 4: s^0	6		

Hesaplama, boş bölümlerin sıfır değerine sahip olduğu varsayılır. İlk sütundaki elemanların tamamı aynı işarete sahip olmadığından, sistem kararsızdır. İki tane işaret değişimi vardır; yani 11/3'ten -32/11'e ve -32/11'den 6'ya ve bu nedenle s -düzleminin sağ tarafında iki tane kök mevcuttur.

Daha ileri bir örnek için, paydası $s^4+8s^3+18s^2+16s+5$ olan transfer fonksiyonunu düşünelim. Bütün katsayılar, aynı işaretli olduğundan ve eksik olan bir katsayı bulunmadığından, sistem kararlı olabilir. Tablo aşağıdaki gibidir:

Satır 0: s^4	1	18	5
Satır 1: s^3	8	16	
Satır 2: s^2	16	5	
Satır 3: s^1	216/16		
Satır 4: s^0	5		

İlk sütun elemanlarının hepsi pozitifdir ve bu nedenle sistem kararlıdır.

Özel durumlar

Karakteristik denklemin katsayılarına bağlı olarak, tabloyu oluşturmada aşağıdaki zorluklar ortaya çıkabilir:

- 1 Bir satırın ilk elemanı sıfır; fakat satırdaki diğer elemanlar, sıfır değil.
- 2 Bir satırdaki tüm elemanlar sıfır.

Bir satırdaki ilk elemanın sıfır olmasının olası bir problemi (sonucu), sıfıra bölerek elde etmek zorunda kalacağımız için, bir sonraki satırdaki bütün elemanların tanımsız olmasıdır. Bundan kaçınmak için, ilk sütundaki sıfır elemanı, pozitif küçük bir ε sayısı ile yer değiştirilir ve tablo işlemine devam edilir.

Bir sonraki örnek, $3s^4+6s^3+2s^2+4s+5=0$ karakteristik denklemi için bu durumu betimliyor. İkinci satırda, ilk sütunda bir sıfırla karşılaşırız ve daha ileri gidemiyoruz.

$$\begin{array}{l|lll} \text{Satır 0: } s^4 & 3 & 2 & 5 \\ \text{Satır 1: } s^3 & 6 & 4 & \\ \text{Satır 2: } s^2 & 0 & 5 & \\ \text{Satır 3: } s^1 & & & \\ \text{Satır 4: } s^0 & & & \end{array}$$

Eğer ε 'yi 0 yerine yazarsak, aşağıdaki tabloyu elde ediyoruz:

$$\begin{array}{l|lll} \text{Satır 0: } s^4 & 3 & 2 & 5 \\ \text{Satır 1: } s^3 & 6 & 4 & \\ \text{Satır 2: } s^2 & \varepsilon & 5 & \\ \text{Satır 3: } s^1 & 4-30/\varepsilon & & \\ \text{Satır 4: } s^0 & 5 & & \end{array}$$

ε çok küçük pozitif bir sayı olduğundan, $4-30/\varepsilon$ negatif olacaktır. Bundan dolayı ilk sütunda bir işaret değişikliği olacaktır ve bu nedenle sistem kararlı değildir. İki tane işaret değişimi, s -düzleminin sağ tarafında iki kutup olduğunu gösterir.

Tüm satırın 0 olması durumu, s -düzleminde simetrik olarak yer alan köklerin varlığı ile oluşur; yani zıt işaretli reel kök çiftleri ve sanal eksen üzerinde simetrik olarak yer alan eşlenik kök çiftleri durumunda... Tabloyu oluştururken tümü sıfır olan bir satır elde edersek, devam edebilmek için aşağıdaki adımları uygulayalım:

- 1 Sıfır satırından önce gelen satırdaki katsayılar kullanılarak oluşturulacak $A(s)=0$ yardımcı denklemiyle; yardımcı denklemin kökleri, ilk karakteristik denklemimizin kökleridir de.
- 2 $dA(s)/ds$ verecek şekilde yardımcı denklemin s 'e göre türevini al.
- 3 Sıfır satırını, $dA(s)/ds$ 'nin katsayılarıyla yer değiştir.
- 4 Tabloyu oluşturmaya devam et ve normal tarzda, ilk sütundaki işaretleri yorumla.

Bir sonraki örnek, $s^5+4s^4+8s^3+8s^2+7s+4=0$ karakteristik denklemi için bu durumu betimliyor. Tablo aşağıdaki gibidir:

Satır 0: s^5	1	8	7
Satır 1: s^4	4	8	4
Satır 2: s^3	6	6	
Satır 3: s^2	4	4	
Satır 4: s^1	0	0	

Devam edebilmek için, $A(s)=4s^2+4$ olsun. Bundan dolayı türevi $8s$ 'dir. Bunun sonucunda beşinci satırın terimleri için, $8s=0$ karakteristik denklemi kullanırsak:

Satır 0: s^5	1	8	7
Satır 1: s^4	4	8	4
Satır 2: s^3	6	6	
Satır 3: s^2	4	4	
Satır 4: s^1	8		
Satır 4: s^0	4		

İlk satır için işaret değişimi yoktur ve bu nedenle sistem kararlıdır.

Ayarlanabilir sistemler

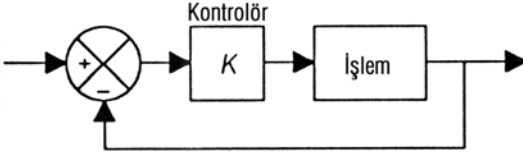
Olası bir gereklilik, ayarlanabilir bir K sabitinin hangi aralığı için bir sistemin kararlı olduğunu belirlemek olabilir. Örnek olarak, paydası s^3+4s^2+8s+K olan bir transfer fonksiyonu için, K 'nın hangi aralığı için sistem kararlıdır? Bu karakteristik denklemin Routh tablosu aşağıdaki gibidir:

Satır 0: s^3	1	8	1
Satır 1: s^2	4	K	
Satır 2: s^1	$8-\frac{1}{4}K$		
Satır 3: s^0	K		

Sistemin kararlı olabilmesi için, ilk sütundaki bütün elemanlar aynı işaretli olmak zorundadır. Bunun anlamı, $8-\frac{1}{4}K$ 0'dan büyük

olmalıdır; yani $32 > K$, ve K 0'dan büyük olmalı. Bu sebeple K 0 ve 32 arasında olmalıdır.

Bu tekniğin daha ileri bir örneği için, Şekil 3.9'da gösterilen, kapalı-döngü kontrol sistemini ve kontrolörün kazancı, K 'nın, belirlenmesinde proses işlem transfer fonksiyonu $1/s(s^2+s+2)$ olduğunda ve geri besleme döngüsü transfer fonksiyonu 1 olduğunda, kararsızlıkla sonuçlanacak durumu düşünün.



Şekil 3.9 Kapalı-döngü kontrol sistemi

İleri yol transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\frac{K}{s(s^2 + s + 2)}$$

ve bu nedenle kapalı-döngü sisteminin transfer fonksiyonu, aşağıdaki gibidir:

$$\frac{K / s(s^2 + s + 2)}{1 + K / s(s^2 + s + 2)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 2) + K}$$

Bundan dolayı, karakteristik denklem:

$$s^3 + s^2 + 2s + K = 0$$

Bu denklem için Routh tablosu aşağıda belirtildiği gibidir:

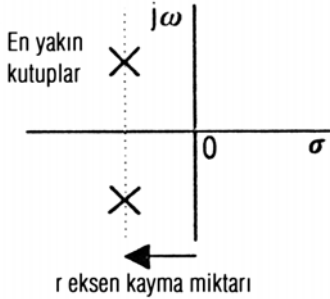
Satır 0: s^3	1	2
Satır 1: s^2	1	K
Satır 2: s^1	2-K	
Satır 3: s^0	K	

Sistemin kararlı olması için, $2-K > 0$ ve $K > 0$ olmalıdır. Bu nedenle, K , 0 ile 2 arasında olduğunda sistem kararlıdır; K 2'den büyük olduğunda kararsız hale gelir.

Görelî kararlılık

Bütün kökleri, s -düzleminin sol yarısında bulunan bir sistem, kararlıdır. Buna rağmen, bir veya daha fazla kök, sanal eksene yakın olabilir ve bu nedenle sağ tarafa çok yakındır ve kararsız hale geçmeye yakındır. Sanal eksen ve eksene en yakın kök arasındaki uzaklık, değeri ne kadar büyük olursa, kök de eksenden o kadar uzak olacağından ve kararsız halden uzak olacağından dolayı, görelî kararlılık olarak tanımlanır.

Göre(ce)li kararlılık, sanal eksenin sistemi kararsız hale getirmek için ne kadar kaydırılması gerektiğinin belirlenmesiyle elde edilir (Şekil 3.10). Eksenin sol tarafa kaydırılması demek, diyelim ki -1 kadar kaydırılsın; bütün köklerin reel değerlerinin 1 eksilmesi anlamına gelir ve bunun sonucu karakteristik denklemdaki bütün s değerleri yerine $(r-1)$ konulmalıdır. Elde ettiğimiz r denklemi, kararlılık yönünden test edilebilir.



Şekil 3.10 Eksen kaydırılması

Göreceli kararlılığı tespit etmeye bir örnek olarak, $s^3+4s^2+8s+4=0$ karakteristik denklemini ve sanal eksene -1'den daha yakın bir kök olup olmadığı durumunu düşünelim. Eksen kaydırılmadan önce, aşağıdaki tablo sistemin kararlı olduğunu gösteriyor.

Satır 0: s^3	1	8
----------------	---	---

Satır 1: s^2	4	4
Satır 2: s^1	7	
Satır 3: s^0	4	

Eksen -1 kadar kaydırıldığı zaman, karakteristik denklem, aşağıdaki ifadeyi verecek şekilde, s yerine $r-1$ koyulursa:

$$(r-1)^3 + 4(r-1)^2 + 8(r-1) + 4 = 0$$

ve bunun sonucunda:

$$r^3 + r^2 + 3r - 1 = 0$$

Bu denklem için tablo aşağıda verildiği gibidir:

Satır 0: s^3	1	3
Satır 1: s^2	1	-1
Satır 2: s^1	4	
Satır 3: s^0	-1	

Sonuç olarak, sistem kararsızdır ve sadece bir işaret değişikliği olduğundan, -1 çizgisinin sağında sadece bir kök vardır.

4. Zaman bölgesi İÇİNDE BAŞARIM ÖLÇÜTÜ

Kararlı-hâl hatası

Bir sistemin zaman bölgesi tepkisi, iki temel eleman sahiptir: geçici tepki ve kararlı-hâl tepkisi. Geçici tepki, zaman geçtikçe 0'a düşer. Kararlı-hâl tepkisi, bunun sonucunda, geçici tepki yok olduktan sonra sistemin kalan kısmıdır. Kararlı-hâl tepkisi ve kontrol girdisi arasındaki hata, kararlı-hâl hatası olarak tanımlanır. Kararlı-hâl hatası bu sebeple, bir sistemin özel bir girdiye karşı nasıl tepki vereceğini belirleyen bir doğruluk ölçümüdür.

Figür 4.1'de gösterilen, ileri yol transfer fonksiyonu $G(s)$ ve negatif geri besleme transfer fonksiyonu $H(s)$ olan bir kontrol sistemini düşünelim. Eğer sistemin kontrol girdisi $x(t)$ ise ve sistem çıktısından geri beslenen sinyal $b(t)$ ise, hata $e(t)$ aşağıda belirtildiği gibidir:

$$hata = e(t) = x(t) - b(t) \quad [1]$$

s -bölgesinde, hata $E(s)$, aşağıda belirtildiği gibidir:

$$hata = E(s) = X(s) - B(s) \quad [2]$$

$$= X(s) - H(s)Y(s) \quad [3]$$

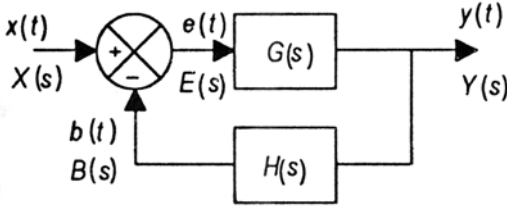
$T(s)$ bütün sistemin transfer fonksiyonu ise;

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} \quad [4]$$

olduğundan:

$$\begin{aligned} E(s) &= X(s) - \frac{H(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)} X(s) \\ &= \frac{X(s)}{1 + H(s)G(s)} \end{aligned} \quad [5]$$

Hata, bundan dolayı, girdi sinyal formuna ve sistemin transfer fonksiyonuna bağlıdır.



Şekil 4.1 Birim geri beslemeli olmayan sistem

Denklemler çoğu zaman, birim geri beslemesi olmayandan ziyade, birim geri beslemeli sistemler için elde edilir. Bu tip bir sistem için, hata aşağıda verildiği gibidir:

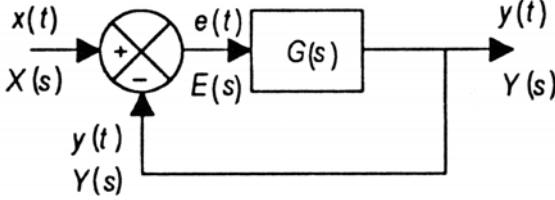
$$hata = e(t) = x(t) - y(t) \quad [6]$$

s -bölgesinde hata $E(s)$ aşağıdaki gibidir:

$$hata = E(s) = X(s) - Y(s) \quad [7]$$

$$= X(s) - T(s)X(s) = [1 - T(s)]X(s) \quad [8]$$

Denklem [4]'ü $H(s)=1$ için kullanırsak:



Şekil 4.2 Birim geri beslemeli sistem

$$E(s) = \frac{X(s)}{1 + G(s)} \quad [9]$$

Bunun sonucunda, sistem birim geri beslemeli olmadığından, hata girdi sinyal formuna ve sistemin transfer fonksiyona bağlıdır.

Kararlı-hal hatası e_{ss} t sonsuza giderken $e(t)$ olarak tanımlanır:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad [10]$$

2. bölümde de kullandığımız Laplace dönüşümünün son değer teoremini kullanarak:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad [11]$$

Fakat birim geri besleme olmayan sistemler için (Figür 4.1'de olduğu gibi), Denklem [5]'i kullanırsak:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX(s)}{1 + H(s)G(s)} \quad [12]$$

Birim geri beslemeli sistem için (Figür 4.2'de olduğu gibi), denklem [9] aşağıdaki ifadeyi verir:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX(s)}{1 + G(s)} \quad [13]$$

Kontrol sistemleri tipleri

Kararlı-hâl hatası, ilgili kontrol sisteminin tipine bağlıdır. Birim geri beslemesi olmayan bir sistem için, hata $H(s)$ ile $G(s)$ çarpımına bağlıdır. Bu çarpım, döngü transfer fonksiyonu olarak tanımlanır. Genelde, döngü transfer fonksiyonu, z ve p 'ler çarpımının kutup ve sıfırları olmak üzere, aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$H(s)G(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad [14]$$

Eğer orijinde a tane kutup ve b tane sıfır varsa, denklem [14]'ü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$H(s)G(s) = K \frac{s^a (s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_{m-a})}{s^b (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{n-b})} \quad [15]$$

Eğer $b-a=j$ dersek, o zaman:

$$H(s)G(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_{m-a})}{s^j (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{n-b})} \quad [16]$$

Bu tip bir sistem, j tip sistem olarak tanımlanır.

Birim geri beslemeli bir sistem için; hata, ileri yol transfer fonksiyonu $G(s)$ 'e bağlıdır. Bu, bazen *açık-döngü transfer fonksiyonu* $G_o(s)$ olarak tanımlanır. Genelde, açık-döngü transfer fonksiyonu, z ve p 'ler çarpımının kutup ve sıfırları olmak üzere, aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$G_o(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad [17]$$

Eğer orijinde a tane kutup ve b tane sıfır varsa, denklem [17]'ü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$G_o(s) = K \frac{s^a (s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_{m-a})}{s^b (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{n-b})} \quad [18]$$

Eğer $b-a=j$ dersek, o zaman:

$$G_o(s) = K \frac{(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_{m-a})}{s^j(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_{n-b})} \quad [19]$$

Bu tip bir sistem, *j tip sistem* olarak tanımlanır.

Tip numarası, döngü transfer fonksiyonu veya açık döngü transfer fonksiyonundaki 1/s faktörü sayıdır.

1/s integral almaya karşılık geldiğinden, tip numaraları döngü transfer fonksiyonundaki veya açık-döngü transfer fonksiyonundaki *integratör* sayısıdır. Bu sebeple eğer $j=0$ ise sistem, tip 0 sistemdir; eğer $j=1$ ise sistem, tip 1 sistemdir; eğer $j=2$ ise sistem, tip 2 sistemdir v.s.

Bir örnek olarak, aşağıdaki döngü transfer fonksiyonuna sahip bir sistem:

$$G(s)H(s) = \frac{K(1+0.5s)}{s(1+s)(1+2s)(1+3s)}$$

sadece bir tane 1/s faktörüne sahiptir ve bu sebeple tip 1 sistemdir. Aşağıdaki döngü transfer fonksiyonuna sahip bir sistemde:

$$G(s)H(s) = \frac{(1+0.5s)}{(1+s)(1+2s)}$$

1/s faktörü yoktur ve bu sebeple tip 0 sistemdir.

Bir birim adım girdisinde kararlı-hâl hatası

Birim geri beslemesi olmayan kapalı-döngü bir kontrol sistemine verilen bir birim adım girdisi düşünün (Şekil 4.1’de olduğu gibi). $X(s)=1/s$ olmak üzere, denklem [12] kullanılırsa, kararlı-hâl hatası aşağıdaki gibidir:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s[1+H(s)G(s)]} \quad [20]$$

$$= \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s)} \quad [21]$$

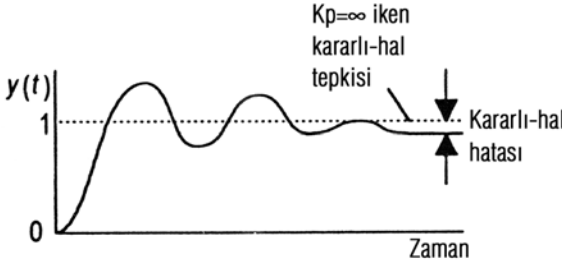
s sıfıra giderken döngü transfer fonksiyonun ulaştığı değer K_p adım-hata katsayısı veya konum-hata katsayısı olarak adlandırılır.

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s) \quad [22]$$

Bu sebeple:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad [23]$$

Figür 4.3, adım-hata katsayısı sonlu bir sayı olduğu zaman, sonsuz olmadığı zaman, bir birim adım girdide oluşan tepki tipini gösteriyor ve sonuç olarak bir kararlı-hâl hatası oluşuyor. Birim-hata katsayısı sonsuz olduğu zaman, kararlı-hâl hatası oluşmaz. Adım-hata katsayısını sonsuz yapmak için, içinde $1/s$ terimi olan bir döngü transfer fonksiyonuna sahip olmamız gerekiyor; böylece, $s = 0$ olduğu zaman $K_p = \infty$ olur ve kararlı-hâl hatası artık 0 olur. Bunun anlamı tip 1 veya daha yüksek tipte bir sistemdir; sadece tip 0 sistemi, bu sebeple bir kararlı-hâl hatası verir.



Şekil 4.3 Bir adım girdisine gösterilen tepki

Bir rampa girdisinde kararlı-hâl hatası

Birim geri beslemesi olmayan kapalı-döngü bir kontrol sistemine verilen bir birim rampa girdisi, yani $y(t)=1t$, düşünelim (Şekil 4.1'de olduğu gibi). $X(s)=1/s^2$ olmak üzere, denklem [12] kullanılırsa, kararlı-hâl hatası aşağıdaki gibidir:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 [1 + H(s)G(s)]} \quad [24]$$

$$= \frac{1}{s \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s)} \quad [25]$$

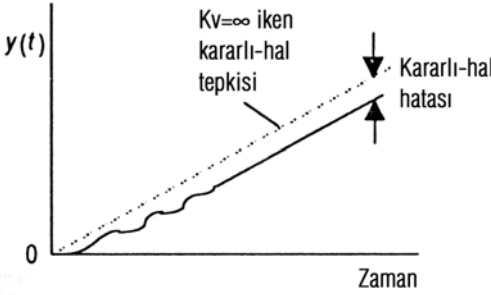
s sıfıra giderken döngü transfer fonksiyonunun ulaştığı değer K_v rampa-hata katsayısı veya hız-hata katsayısı olarak adlandırılır.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s)G(s) \quad [26]$$

Bu sebeple:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad [27]$$

Şekil 4.4, rampa-hata katsayısı sonlu bir sayı olduğu zaman, sonsuz olmadığı zaman, bir birim rampa girdide oluşan tepki tipini gösteriyor ve sonuç olarak bir kararlı-hal hatası var.



Şekil 4.4 Bir rampa girdisine gösterilen tepki

Rampa-hata katsayısı sonsuz olduğu zaman, kararlı-hal hatası yoktur. Denklem [26], bir $1/s$ terimi elde etmek için, döngü transfer fonksiyonu $1/s^2$ veya daha yüksek dereceli bir terim içermeli. Bunun anlamı, sıfır kararlı-hal hatası elde etmek için, tip 2 veya daha yüksek bir tip sistem gereklidir. Bir tip 1 sistemi, $1/K_v$ kararlı-hal hatasını verir. Bir tip 0 sisteminde, $1/s$ terimi yoktur ve bu nedenle $s=0$ için, $K_v=0$ 'dır. Bunun anlamı sonsuz bir kararlı-hal hatasıdır.

Parabolik bir girdi için kalıcı-hâl hatası

Birim geri beslemesi olmayan kapalı-döngü bir kontrol sistemine verilen bir birim parabolik girdi, yani $y(t)=1t^2$, düşünelim (Şekil 4.1’de olduğu gibi). $X(s)=1/s^3$ olmak üzere, denklem [12] kullanılırsa, kararlı-hal hatası aşağıdaki gibidir:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^3 [1 + H(s)G(s)]} \quad [28]$$

$$= \frac{1}{s^2 \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)G(s)} \quad [29]$$

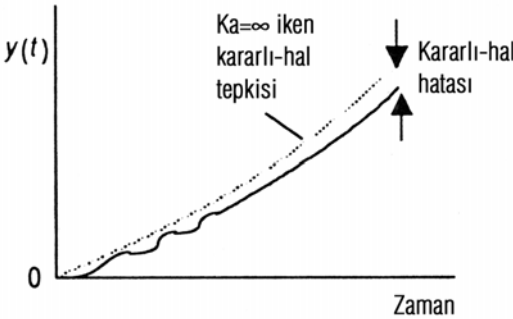
s sıfıra giderken döngü transfer fonksiyonunun ulaştığı değer K_a parabolik-hata katsayısı veya ivme-hata katsayısı olarak adlandırılır.

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)G(s) \quad [30]$$

Bu sebeple:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \quad [31]$$

Şekil 4.5, parabolik-hata katsayısı sonlu bir sayı olduğu zaman, sonsuz olmadığı zaman, bir birim parabolik girdide oluşan tepki tipini gösteriyor ve sonuç olarak bir kararlı-hal hatası var.



Şekil 4.5 Parabolik bir girdiye gösterilen tepki

Parabolik-hata katsayısı sonsuz olduğu zaman, kararlı-hal hatası yoktur. Denklem [30], bir $1/s$ terimini elde etmek için, döngü

transfer fonksiyonu $1/s^2$ veya daha yüksek dereceli bir terim içermelidir.

Bunun anlamı, sıfır kararlı-hal hatası elde etmek için, tip 3 veya daha yüksek bir tip sistem gereklidir. Tip 2 sistemi, $1/K_a$ kararlı-hal hatasını verir. Tip 0 veya tip 1 sisteminde, $1/s$ terimi yoktur ve bu nedenle $s=0$ için, $K_a=0$ 'dır. Bunun anlamı sonsuz (kalıcı) bir kararlı-hal hatasıdır.

Kalıcı- hal hataları özeti

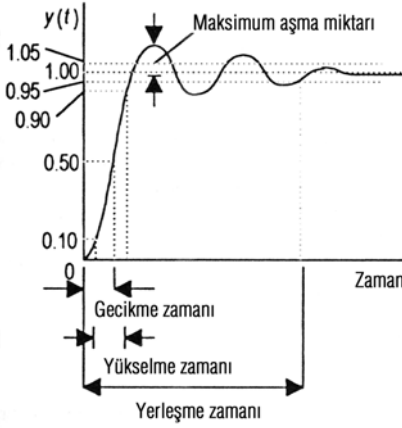
Tablo 4.1 kararlı-hal hatalarını, birim adım, birim rampa ve birim parabolik girdilere göre özetliyor.

Tablo 4.1 Kararlı-hal hataları

Tip	K_p	K_v	K_a	<u>Kararlı-hal hataları</u>		
				Adım	Rampa	Parabolik
0	K	0	0	$1/(1+K)$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$1/K$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$1/K$
3	∞	∞	∞	0	0	0

Kontrol sistemleri için geçici tepkiler

Kontrol sistemlerinin geçici tepkileri çoğu zaman, sistemlerin bir birim adım girdisine verdiği tepki cinsinden belirtilir. Şekil 4.6, böyle bir tepkinin tipik formunu gösteriyor.



Şekil 4.6 Birim adıma gösterilen tepki

Tepkinin belirtilmesinde kullanılan terimler:

1 *Aşma/Yükselme miktarı*

Aşma/yükselme miktarı, tepkinin kararlı-hal değerinin, maksimum geçildiği miktardır. Aşma miktarı bazen, kararlı-hal değerinin yüzdesi olarak yazılır. Bu yüzde, çoğu zaman bir kontrol sisteminin göreceli kararlılığının bir ölçütü olarak kullanılır; genellikle, büyük bir yükselme miktarı arzu edilmez.

İkinci-derece alt sönümlü bir sistemin, bir birim adım girdisine tepkisi, aşağıda belirtilen formdadır (2.bölümde, denklem [20]'den):

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (P \cos \omega t + Q \sin \omega t) + F/k \quad [32]$$

$t=0$ için $y(t)=0$ 'dır ve bu nedenle, $P=-F/k$ olmalıdır. $t=\infty$ olduğu zaman kararlı-hal değeri ve buna bağlı olarak üssel terim 0'dır ve bu nedenle $y_{ss}(t)=F/k=-P$ 'dir. Yükselme $\omega t=\pi$ olduğu zaman gerçekleşir ve bu nedenle:

$$\begin{aligned} y_{\text{yükselme miktarı}}(t) &= e^{-\zeta\omega_n \pi / \omega} (P \cos \pi + Q \sin \pi) + F/k \\ &= e^{-\zeta\omega_n \pi / \omega} y_{ss} + y_{ss} \end{aligned}$$

Yükselme, yükselme tepkisi ile kararlı-hal değeri arasındaki farktır ve böylece:

$$y_{\text{yükselme miktarı}} = y_{ss} e^{-\zeta \omega_n \pi / \omega} \quad [33]$$

$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ olduğundan:

$$y_{\text{yükselme miktarı}}(t) = \exp\left(\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \quad [34]$$

2 Yükselme zamanı

Yükselme zamanı t_r genellikle, tepkinin kararlı-hal değerinin %10'undan %90'ına çıkana kadar geçen süre olarak tanımlanır. Bazen, 0'dan kararlı-hal değerine ulaşana kadar geçen süre olarak da tanımlandığı olur. ω frekansına sahip bir salınının 0'dan kararlı-hal değerine kadar yükselmesi için geçen süre, bir tam devrin çeyreğini tamamlayana kadar geçen süredir; yani $\frac{1}{2} \pi$ ve böylece, yükselme zamanının tanımı için aşağıdaki ifadeyi kullanabiliriz:

$$\omega t_r = \frac{1}{2} \pi \quad [35]$$

3 Gecikme zamanı

Gecikme zamanı t_d tepkinin, kararlı-hal değerinin %50'sine ulaşana kadar geçmesi gereken süre olarak tanımlanır; yani salınının, bir tam devrin sekizde birini tamamlaması için geçen süre kadar: $\frac{1}{4} \pi$ ve böylece:

$$\omega t_d = \frac{1}{4} \pi \quad [36]$$

4 Tepe zamanı

Tepe zamanı, tepkinin 0'dan ilk tepe değerine ulaşana kadar geçen süredir, yani salınının bir tam devrin yarısını tamamlaması için geçen süre, yani π ve böylece:

$$\omega t_d = \pi \quad [37]$$

5 Yerleşme zamanı

Yerleşme zamanı t_s salınımların kararlı-hal değerinin belirli bir yüzdesi dahilinde sönümlenmesi için geçen süredir. Çoğu zaman kullanılan değerler % 2 veya 5'tir.

İkinci derece alt sönümlü bir sistemin, bir birim adım girdisine tepkisi, aşağıda belirtilen formdadır (2.bölümde, denklem [20]):

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (P \cos \omega t + Q \sin \omega t) + F/k \quad [38]$$

$t=0$ için $y(t)=0$ 'dır ve $P=-F/k$ olmalıdır ve y_{ss} üssel terimin 0 olduğu zamanki $y(t)$ değeri olduğundan, $P=-y_{ss}$ 'tir. Kararlı-hal değer yakınındaki salınımların genliği $y(t)-y_{ss}$ 'tir. y_{ss} üssel terimin 0 olduğu zamanki $y(t)$ değeri olduğundan; denklem [38] aşağıdaki ifadeyi verir:

$$Genlik = e^{-\zeta\omega_n t} (-y_{ss} \cos \omega t + Q \sin \omega t)$$

Genliğin maksimum değeri, ωt 'nin $\pm \pi$ 'nin katları olduğu durumlar için gerçekleşir ve böylece, $\cos \omega t = \pm 1$ ve $\sin \omega t = 0$ 'dır. Eğer yerleşme zamanını, genliğin kararlı-hal değerinin % 2 altında olduğu anki zaman olarak düşünersek, o zaman:

$$0.02 = e^{-\zeta\omega_n t_s}$$

ve böylece:

$$t_s = \frac{\ln 0.02}{-\zeta\omega_n}$$

$\ln 0.02 = -3.9$ veya yaklaşık -4 olduğundan:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad [39]$$

Eğer yerleşme zamanı % 5 üzerinden alınırsa:

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad [40]$$

6 *Salınım sayısı*

Yerleşme zamanı içerisinde oluşan salınım sayısı, yerleşme zamanı bölü salınımların periyod zamanıdır.

Periyot zamanı $2\pi/\omega$ 'dir. Böylece, % 2 yerleşme zamanı için:

$$\text{Salınım sayısı} = \frac{4/\zeta\omega_n}{2\pi/\omega} = \frac{2\omega}{\pi\zeta\omega_n}$$

$\omega = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ olduğundan:

$$\text{Salınım sayısı} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} \quad [41]$$

7 *Azalma oranı*

Azalma veya çökme oranı, ardışık iki yükselmenin oranıdır. İlk yükselme $\omega t = \pi$ olduğu zaman gerçekleşir ve ikinci yükselme $\omega t = 3\pi$ olduğu zaman, yani tam bir devir sonra gerçekleşir. Böylece, denklem [34]'ü kullanarak aşağıdaki ifade elde edilebilir:

$$\text{ilk yükselme miktarı} = y_{ss} \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad [42]$$

Denklem [34]'ün elde edilmesine benzer biçimde, aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz:

$$\text{ikinci yükselme miktarı} = y_{ss} \exp\left(\frac{-3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad [43]$$

Bu sebeple azalma oranı:

$$\text{bozunum oranı} = \frac{y_{ss} \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{y_{ss} \exp\left(\frac{-3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

$$= \exp \left(\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \quad [44]$$

8 Logaritmik azalma

Logaritmik azalma, azalma oranının logaritmasıdır ve böylece:

$$\text{logaritmik azalma} = \ln(\text{bozunum oranı}) = \frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad [45]$$

Performans endeksleri

Bir sistemi dizayn ederken çoğu zaman, performans parametrelerine bağlı olarak optimum performansı verecek sistemi bir şekilde belirleyen bir performans endeksine/indisi ihtiyaç vardır. Adaptif/uyarlanabilir kontrol sistemlerinde, sistem parametreleri optimum performansı verecek şekilde sürekli ayarlanır; böylece optimum durumu belirlemede kullanılabilecek bir parametreye ihtiyaç duyulur.

Hata karenin integrali

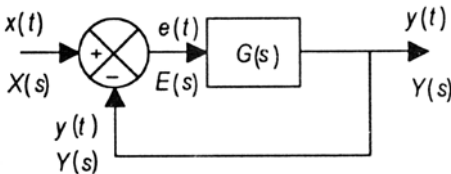
Bir birim adım girdisi olduğu zaman, en sık kullanılan performans endeksi/indisi, hata karenin (ya da kare hata) integralidir (ISE).

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad [46]$$

(ISE=Integral Square Error: hata karenin integrali)

Bir örnek olarak, aşağıdaki transfer fonksiyonunununa sahip ikinci-derece birim geri beslemeli (Şekil 4.7) bir sistem için ISE'nin bulunmasını düşünün:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



Şekil 4.7 Birim geri beslemeli sistem

Bir birim adım girdisi için, girdi ve çıktı arasında s-bölgesindeki hata aşağıda belirtildiği gibidir:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= X(s) - Y(s) = X(s) - G(s)X(s) = \frac{1}{s} [1 - G(s)] \\
 &= \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] \\
 &= \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad [47]
 \end{aligned}$$

Bu denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(s) = \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} \quad [48]$$

Ve bunun sonucunda:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} + \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} \\
 E(s) &= \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} \\
 &\quad + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} \quad [49]
 \end{aligned}$$

Bunun ters dönüşümü de aşağıdaki gibidir:

$$e(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) \right] \quad [50]$$

$r^2 = a^2 + b^2$ ve $\tan \theta = b/a$ olmak üzere, $a \sin \theta + b \cos \theta = r \sin (\theta + \phi)$ denklemini kullanırsak, denklem [50] aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$e(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi) \quad [51]$$

O zaman, denklem [46]'da verilen ISE aşağıdaki gibi olur:

$$ISE = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\zeta\omega_n t}}{1 - \zeta^2} \sin^2 \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi \right) dt$$

$$= \frac{1 + 4\zeta^2}{4\zeta\omega_n} \quad [52]$$

Ayarlanabilir ve sabit bir ω_n 'e sahip bir sistem için, ISE'nin minimum değerini, $d(ISE)/d\zeta=0$ için sağlar, yani:

$$-\frac{1}{4\zeta^2\omega_n} + \frac{1}{\omega_n} = 0$$

olduğu zaman, ve dolayısıyla $\zeta=0.5$ olduğu zaman. Bu durumda, varılan değer, optimum değerdir.

Böylece, ileri yol transfer fonksiyonu $100/(s^2 + ks + 100)$ olan birim geri beslemeli bir sistem için, k 'nın optimum değeri, $k=2\zeta\omega_n=2 \times 0.5 \times 10=10$ olduğu zamandır.

Diğer performans parametreleri

Kullanılan diğer performans parametreleri aşağıdadır:

1 Hatanın mutlak değerinin integrali (IAE)

Bu, kararlı-hal değerinden olan bütün sapmalara eşit ağırlık verir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad [53]$$

(IAE=Integral of Absolute Value of Error: hatanın mutlak değerinin integrali)

2 Zaman mutlak hatanın integrali (ITAE)

Bu, önceki sapmalar, sonrakilerden daha az ağırlıklı olacak şekilde, kararlı-hal değerinden sapmalara ağırlık verir. Bunu, hatayı zamanla çarparak yapar. ITAE, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad [54]$$

(ITAE=Integral of Time-Absolute Error: zaman-mutlak hatanın integrali)

3 Zaman kare hatanın integrali (ITSE)

Bu, sonraki sapmalar, öncekilerden daha az ağırlıklı olacak şekilde, kararlı-hal değerinden sapmalara ağırlık verir. Bunu, hatanın karesini zamanla çarparak yapar. ITSE, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$ITSE = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt \quad [55]$$

(ITSE=Integral of Time-Square Error: zaman-kare hata(sı)nın integrali)

Örnek olarak, yukarda tanımlanan ikinci-derece bir sistem için optimum sönümleme faktörünü belirlemeyi düşünün. Hata, denklem [51]'deki gibi verilir ve böylece ITSE aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} ITSE &= \int_0^{\infty} t \frac{e^{-2\zeta\omega_n t}}{1-\zeta^2} \sin^2\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi\right) dt \\ &= \frac{1}{2\omega_n^2} \left(\frac{1}{4\zeta^2} + 2\zeta^2 \right) \end{aligned} \quad [56]$$

Optimum sönümleme faktörünü, $d(ITSE)/d\zeta=0$ için sağlar, yani:

$$-\frac{2}{4\zeta^3} + 4\zeta = 0$$

Optimum sönümleme faktörü böylece $1/8^{1/4}=0.60$ 'dır.

İkinci-derece sistemler için benzer hesaplamalar, IAE için optimum sönümleme faktörünü 0.7 ve ITAE için optimum sönümleme faktörü 0.7 kalır.

5. Frekans düzleminde tepki

Frekans tepkisi

X genlik, ω_o açısal frekans olmak üzere, sinüzoidal bir $x(t)$ girdisine sahip bir sistem düşünelim:

$$x(t) = X \sin \omega_o t \quad [1]$$

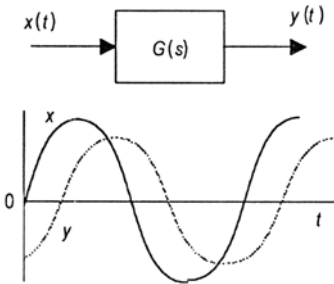
Bu sistemin, girdi $x(t)$ ile çıktı $y(t)$ arasındaki ilişkisi aşağıda belirtildiği gibi olan birinci-derece bir sistem olduğunu varsayın:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) \quad [2]$$

$a_1 dy(t)/dt$ ve $a_0 y(t)$ toplandığı zaman, sinüzoid $b_0 X \sin \omega_0 t$ 'yi elde etmeliyiz. Sinüzoidler, türevleri alındığı zaman, sonucu aynı frekansa sahip bir sinüzoid olan bir özelliğe sahiptirler. Böylece, kararlı-hal tepkisi $y(t)$ 'nin girdiye benzer aynı frekansa sahip bir sinüzoid olmasını bekleriz, fakat Y genlik ve θ faz farkı olmak üzere, muhtemelen farklı bir genlik ve faz ile (Şekil 5.1):

$$y(t) = Y \sin(\omega_0 t + \theta) \quad [3]$$

Kararlı-halde, girdi ve çıktı genlikleri ile girdi ve çıktı fazları arasındaki ilişki sistemin *frekans tepkisi* olarak tanımlanır.



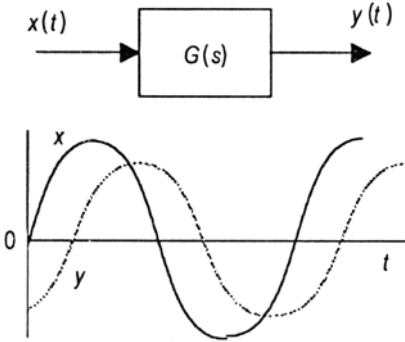
Şekil 5.1 Bir sistemin sinüzoidal tepkisi

Fazörler

Girdi ve çıktı sinyallerinin zamanla değişen sinüzoid dalga formları olduğunu düşünmek yerine, bunları fazör olarak düşünmek daha kolaydır. Genliği Y olan sinüzoidal bir sinyalin, orijinden çıkan Y

uzunluğunda, sabit ω açısal hızına sahip bir çizgi tarafından oluşturulduğunu düşünebiliriz (Şekil 5.2).

Böylece denklem [1]'deki gibi, zamanla değişen bir y varyasyonunu belirtmek yerine, bunu, $t=0$ 'da veya referans eksenine yaptığı açı *faz açısı* olarak tanımlanan bir başka açıda başlayan Y çizgisinin uzunluğu olarak belirtebiliriz. Referans eksen, genellikle yatay eksen olarak alınır. Bu tip çizgiler fazör olarak tanımlanır ve gösterimi, frekans-bölge gösterimi olarak adlandırılır.



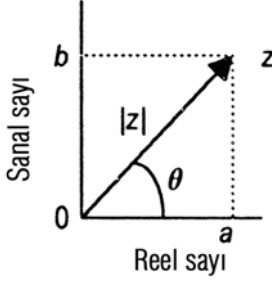
Şekil 5.2 (a) $y = Y \sin \omega t$, (b) $y = Y \sin \omega t + \theta$

Bir fazörü belirtmenin uygun bir yolu polar notasyondur. Böylece, Y uzunluğunda ve θ faz açısına sahip bir fazörü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\mathbf{Y} = Y \angle \theta \quad [4]$$

Koyu basımın, genellikle, sadece büyüklük özelliği olan, dönen bir çizgiyi belirtmeyen ve açı belirtmesi olmayan diğer nicelikleri, fazör niceliklerinden ayırmak için kullanıldığına dikkat edin. Şekil 5.12'de ve denklem [4]'te tanımlandığı şekliyle fazör uzunluğu, niceliğin maksimum değerini gösterse de, uzunluğu ortalama kare kök değeriyle belirtmek daha yaygındır. Ortalama kare kök değeri, sadece, maksimum değerin $\sqrt{2}$ ile bölümüdür ve bu nedenle sadece, maksimum değer kullanılarak çizilenin ölçeklendirilmiş bir versiyonudur.

Bir kompleks sayı $z = a + jb$ Arjand diyagramı üzerinde, θ açısında, uzunluğu $|z|$ olan bir çizgi (Şekil 5.3) olarak gösterilebilir. Böylece, sinüzoidal bir niceliği belirtmek için kullanılan bir fazörü, bu kartezyen formunda bir kompleks sayı olarak aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:



Şekil 5.3 Kompleks sayılar

$$\mathbf{Y} = a + jb \quad [5]$$

Böylece eğer $y = Y \sin \omega t$ ise bu sadece reel bir sayı içeren bir fazör olarak tanımlanır. $y = Y \sin(\omega t + \theta)$ için, genel olarak, hem reel hem sanal kısmı olan bir fazör elde ederiz. Buna rağmen, eğer $\theta = 90^\circ$ ise $\sin(\omega t + 90^\circ) = \cos \omega t$ sadece sanal kısma sahiptir.

Bir z kompleks sayınının büyüklüğü $|z|$ ve argümanı θ aşağıda belirtildiği gibidir:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ve } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad [6]$$

$a = |z| \cos \theta$ ve $b = |z| \sin \theta$ olduğundan:

$$|z| = a \cos \theta + j|z| \sin \theta = |z|(\cos \theta + j \sin \theta) \quad [7]$$

Böylece, fazör Y 'yi aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\mathbf{Y} = |y|(\cos \theta + j \sin \theta) = Y(\cos \theta + j \sin \theta) \quad [8]$$

Bir kompleks sayıyı, dolayısıyla fazörü, tanımlamanın bir başka yolu, bir üstel cinsinden tanımlamaktır. Sinüs ve kosinüs için kuvvet serisi kullanarak, denklem [7]'yi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$z = |z| \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) + j \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \right]$$

$$= |z| \left(1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \dots \right)$$

$j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, $j^5 = -j$, v.s., olduğundan, denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$z = |z| \left(1 + j\theta + \frac{j^2\theta^2}{2!} + \frac{j^3\theta^3}{3!} + \frac{j^4\theta^4}{4!} + \frac{j^5\theta^5}{5!} - \dots \right)$$

Eğer x yerine $j\theta$ koyarsak, bu e^x formunda bir üsselin kuvvet serisidir. Böylece:

$$z = |z| e^{j\theta} \quad [9]$$

Bu, kompleks bir sayının üssel formudur. Dolayısıyla, bir fazörü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\mathbf{Y} = Y e^{j\theta} \quad [10]$$

Frekans tepkisi fonksiyonu

Girdi $x(t)$ ve çıktı $y(t)$ arasındaki ilişki, aşağıda verildiği gibi olan bir sistem düşünün:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) \quad [11]$$

Eğer $x(t)$ sinüzoidal bir girdiyi ve $y(t)$ sinüzoidal bir çıktıyı gösteriyorsa, bir sinüzoidin türevi, aynı sinüzoidin açısal hızıyla çarpılmış, 90° kaymış halini vereceğinden (eğer $y = Y \sin \omega t$ ise $dy/dt = \omega Y \cos \omega t = \omega Y \sin (\omega t + 90^\circ)$), denklem [11]'i aşağıdaki fazör denklem biçiminde yazabiliriz:

$$j\omega a_1 \mathbf{Y} + a_0 \mathbf{Y} = b_0 \mathbf{X} \quad [12]$$

Bundan dolayı:

$$\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}} = \frac{b_0}{j\omega a_1 + a_0} \quad [13]$$

Fakat eğer denklem [10]'un Laplace dönüşümünü alırsak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$sa_1Y(s) + a_0Y(s) = +b_0X(s) \quad [14]$$

ve:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0}{sa_1 + a_0} \quad [15]$$

Denklem [14]'ü alır ve s yerine $j\omega$ yazarsak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$G(j\omega) = \frac{b_0}{j\omega a_1 + a_0} \quad [16]$$

Eğer frekans-tepki fonksiyonunu kararlı-hal'de çıktı fazörünün, girdi fonksiyonuna oranı olarak tanımlarsak; bu, denklem [13]'tekiyle aynı denklemi verir.

Yukarıdaki denkleme ulaşmanın diğer bir alternatif yolu, kompleks sayının üstel biçimini kullanmaktır. Böylece, denklem [11] ile gösterilen, aşağıdaki girdi ve çıktıya sahip bir sistemi düşünersek:

$$\mathbf{X} = Xe^{j\omega t}, \mathbf{Y} = Ye^{j(\omega t + \phi)} \quad [17]$$

$x(t)$ ve $y(t)$, bir zaman anındaki, reel eksen üzerinde dönen fazörlerin reel izdüşümleri (projeksiyonları) olarak düşünülebilir. Böylece:

$$x(t) = X \cos \omega t = X' \text{ in reel kısmı} \quad [18]$$

$$y(t) = Y \cos(\omega t + \phi) = Y' \text{ in reel kısmı}$$

Dolayısıyla, denklem [11]'i aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$a_1 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} + a_0 \mathbf{Y} = b_0 \mathbf{X} \quad [19]$$

fakat $d\mathbf{Y}/dt = j\omega Y e^{j(\omega t + \theta)} = j\omega \mathbf{Y}$ 'dir vebu nedenle denklem [19] aşağıdaki gibi olur:

$$j\omega a_1 \mathbf{Y} + a_0 \mathbf{Y} = b_0 \mathbf{X} \quad [20]$$

Dolayısıyla, denklem [13]'teki gibi:

$$\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}} = \frac{b_0}{j\omega a_1 + a_0} \quad [21]$$

Genelde:

Bir transfer fonksiyonunu frekans-tepki fonksiyonuna dönüştürmek için, s 'i $j\omega$ ile yer değiştirin.

Örnek olarak, transfer fonksiyonu $G(s) = 1/(s + 1)$ olan bir sistem düşünün, frekans-tepki fonksiyonu $G(j\omega) = 1/(j\omega + 1)$ 'dir.

Birinci-derece sistemler için frekans tepkisi

Genelde, birinci-derece bir sistem, τ zaman sabiti olmak üzere, aşağıdaki gibi yazılabilen bir transfer fonksiyonuna sahiptir:

$$G(s) = \frac{1}{1 + s\tau} \quad [22]$$

frekans-tepki fonksiyonu $G(j\omega)$ s yerine $j\omega$ konarak elde edilebilir. Bundan dolayı:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad [23]$$

Denklemin üst ve altını, aşağıdaki ifadeyi verecek şekilde, $1-j\omega\tau$ ile çarparak, bunu, daha uygun bir forma getirebiliriz:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \times \frac{1-j\omega\tau}{1-j\omega\tau} = \frac{1-j\omega\tau}{1+j^2\omega^2\tau^2}$$

Fakat $j^2=-1$ 'dir, dolayısıyla bu denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} - j\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \quad [24]$$

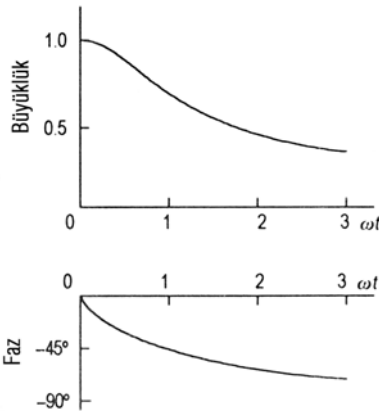
Freakans-tepki fonksiyonu dolayısıyla $1/(1 + \omega^2\tau^2)$ olan reel bir elemana ve $\omega\tau/(1 + \omega^2\tau^2)$ olan sanal bir elemana sahiptir. $G(j\omega)$ çıktı fazörünün girdi fazörüne oranı olduğundan, denklem [6]'yı kullanarak, çıktı fazörünün, girdi fazöründen bir $|G(j\omega)|$ faktörü kadar büyük olduğunu buluruz:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \sqrt{\left(\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \end{aligned} \quad [25]$$

$|G(j\omega)|$ *büyüklik* veya *kazanç* olarak anılır. Denklem [6]'da verilen, girdi fazörü ve çıktı fazörü arasındaki faz farkı aşağıdaki gibidir:

$$\tan\phi = -\omega\tau \quad [26]$$

Negatif işareti, çıktı fazörünün bu açı kadar girdi fazörünün gerisinde olduğunu belirtir. Figür 5.4, büyüklik ve fazı, $\omega\tau$ 'ye bağlı fonksiyonlar olarak gösteriyor:



Şekil 5.4 Birinci-derece bir sistemin frekans tepkisi

Örnek olarak, transfer fonksiyonu $G(s) = 2/(s + 1)$ olan bir sistemin, $2 \sin \omega t$ sinüzoidal girdisine maruz kaldığında, çıktı büyüklük ve fazını düşünün. Frekans-tepki fonksiyonu s yerine $j\omega$ konarak elde edilir. Dolayısıyla:

$$G(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 1}$$

denklemin alt ve üstü $(-j\omega + 1)$ ile çarpılırsa, aşağıdaki ifadeyi verir:

$$G(j\omega) = \frac{-j2\omega + 2}{\omega^2 + 1} = \frac{2}{\omega^2 + 1} - j \frac{2\omega}{\omega^2 + 1}$$

Dolayısıyla denklem [6] ile verilen büyüklük aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \sqrt{\frac{2^2}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{2^2 \omega^2}{(\omega^2 + 1)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \end{aligned}$$

Denklem [6] ile verilen faz açısı aşağıdaki gibidir:

$$\tan \phi = -\omega$$

Belirtilen girdi için, $\omega = 3$ rad/s'dir. Büyüklükte böylece:

$$|G(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 1}} = 0.63$$

ve faz $\tan \phi = -3$ ile verilir. Dolayısıyla

$\phi = -72^\circ$ dir. Bu girdi ve çıktı arasındaki faz açısıdır. Bundan dolayı çıktı $1.26 \sin(3t - 72^\circ)$ 'dir.

İkinci-derece sistemler için frekans tepkisi

Transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olan, ω_n doğal açısal frekans ve ζ sönümleme oranı olmak üzere ikinci-derece bir fonksiyon düşünün:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad [27]$$

Frekans-tepki fonksiyonu s yerine $j\omega$ konarak elde edilir. Dolayısıyla:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_n + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega\omega_n} \\ &= \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \end{aligned}$$

Denklemin alt ve üstünü aşağıdaki ifade ile çarparsak:

$$\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] - j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

Aşağıda belirtilen denklemi verir:

$$G(j\omega) = \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] - j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2} \quad [28]$$

Bu $a+jb$ formudur ve bu nedenle, $G(j\omega)$, çıktı fazörünün girdi fazörüne oranı olduğundan, çıktı fazörü büyüklüğü veya boyutu, denklem [6]'da verildiği gibi, girdi fazöründen $\sqrt{a^2 + b^2}$ faktörü kadar büyüktür ve bu nedenle:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \quad [29]$$

Girdi çıktı arasındaki faz farkı ϕ denklem [6]'da verildiği gibi $\tan \phi = a/b$ 'dir ve bu nedenle:

$$\tan \phi = -\frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad [30]$$

Büyüklik (ω/ω_n) 'e bağlı değişir ve maksimum değeri $d[G(j\omega)]/d(\omega/\omega_n) = 0$ içindir. Bir sadeleştirme olarak, (ω/ω_n) 'i sembolünün yerine u koyarsak:

$$\frac{d[G(j\omega)]}{du} = -\frac{1}{2} \left[(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2 \right]^{-3/2} (4u^3 - 4u + 8u\zeta^2)$$

ve dolayısıyla:

$$4u^2 - 4 + 8\zeta^2 = 0$$

bu da aşağıdaki ifadeyi verir:

$$u = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

ve bu nedenle maksimum büyüklik, açısal frekans ω_p 'ın aşağıdaki değeri içindir:

$$\frac{\omega_p}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad [31]$$

Frekans reel bir nicelik olduğundan, karekök sadece pozitif değerler alabilir ve bundan dolayı bu denklem, değeri $1 > \zeta^2$ olan sönümlenme faktörleri için geçerlidir; yani $\zeta < 0.707$ için. 0.707'den büyük olan bütün sönümlenme değerleri için, tepe frekansı 0'dır.

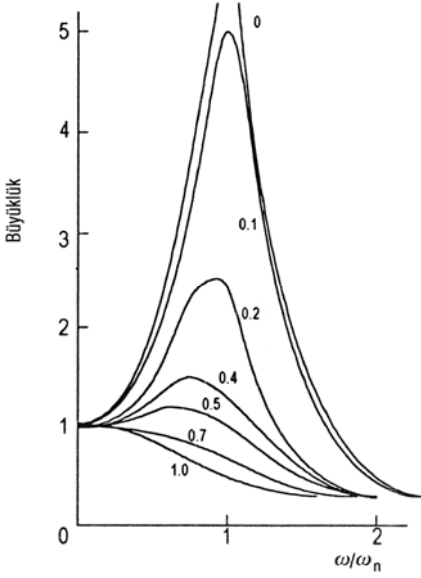
Denklem [29]'daki (ω/ω_n) yerine bunu yazarsak maksimum büyüklik aşağıda verildiği gibi olur:

$$\text{maksimum büyüklik} = M_p = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad [32]$$

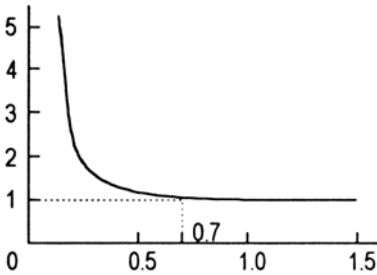
Bu, aynı zamanda değeri 0.707'den küçük olan sönümlenme faktörleri içindir.

Şekil 5.5, farklı sönümlenme faktörleri için,

ikinci-derece bir sistemin (ω/ω_n) 'e bağlı nasıl değiştiğini gösteriyor. Şekil 5.6, tepe büyüklüğü M_p değerinin sönümlleme faktörüne nasıl bağlı olduğunu gösteriyor, yani denklem [32]'nin grafiği.



Şekil 5.5 Farklı sönümlleme faktörlerinde, ikinci-derece bir sistemin büyüklükleri



Şekil 5.6 Amortisman faktörüne bağlı bir fonksiyon olarak M_p

Kapalı-döngü bir sistem için frekans tepkisi

İleri yol transfer fonksiyonu $G(s)$ ve geri besleme yolu transfer fonksiyonu $H(s)$ olan kapalı-döngü bir sistem için, sistemin toplam transfer fonksiyonu $T(s)$ aşağıda verildiği gibidir:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad [33]$$

Toplam frekans tepki fonksiyonu dolayısıyla aşağıda verildiği gibidir:

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \quad [34]$$

Bu, büyüklük ve faz cinsinden aşağıdaki gibi verilir:

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \right| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)H(j\omega)|} \quad [35]$$

$$faz = \angle G(j\omega) - \angle [1 + G(j\omega)H(j\omega)] \quad [36]$$

Bir kompleks sayı bir başka kompleks sayıya bölündüğü zaman, toplam büyüklüğü bulmak için büyüklükleri bölün ve toplam fazı elde etmek için fazları birbirinden çıkarın. Aşağıdaki bu ifadenin bir başka şeklidir.

Polar formları $z_1 = |z_1| \angle \theta_1$ ve $z_2 = |z_2| \angle \theta_2$ iki kompleks sayının bölümünü düşünün:

$$|z| = \frac{|z_1|(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)}{|z_2|(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)}$$

Dolayısıyla:

$$|z| = \frac{|z_1|(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)}{|z_2|(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)} \times \frac{|z_2|(\cos \theta_2 - j \sin \theta_2)}{|z_2|(\cos \theta_2 - j \sin \theta_2)}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \left[\frac{(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - j \sin \theta_2)}{(\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)} \right]$$

Fakat $\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 = 1$ ve bu nedenle:

$$z = \frac{|z_1|}{|z_2|} [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + j(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

Bunu sadeleştirerek aşağıdaki bulunur:

$$z = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad [37]$$

bunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$z = \frac{|z_1|}{|z_2|} \angle (\theta_1 - \theta_2) \quad [38]$$

Frekans düzlemi başarımlı spesifikasyonları

Frekans-bölgesi performansı aşağıdaki parametrelerle tanımlanır:

1 Rezonant frekansı

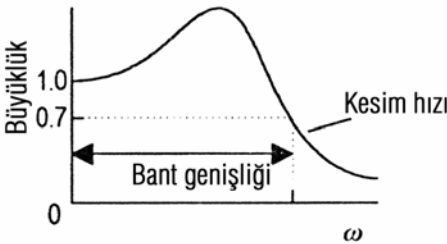
Bu frekans, ω_p , bir sistemin büyüklüğünün, $|T(j\omega)|$ maksimum olduğu yerdir.

2 Tepe Rezonansı

Bu salınım değeri, M_p büyüklük değerinin bir $|T(j\omega)|$ sistemi için maksimum değeridir.

3 Bant genişliği

Bant genişliği, $|T(j\omega)|$ büyüklüğünün, sıfır-frekans değerinden, % 70.7 azaldığı frekans olarak tanımlanır (Şekil 5.7). Bu, sıfır-frekans değerinden 3 dB düşmesidir.



Şekil 5.7 Büyüklük eğrisi ve bant genişliğine bir örnek

4 Kesme hızı

Bu değer, sistemin bant genişliği dışındaki büyüklüğün azalma hızıdır.

Denklem [27]'de tanımlandığı gibi, ikinci derece bir sistemin bant genişliğini düşünün. Denklem [29]'da tanımlanan $|G(j\omega)|$ büyüklüğü aşağıdaki gibi olur:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$

Dolayısıyla, $|G(j\omega)| = 0.707$ için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2} = 1.414$$

$u = \omega/\omega_n$ için denklemi sadeleştirir ve karesini alırsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} (1 - u^2)^2 + (2\zeta u)^2 &= 2 \\ (u^2)^2 - (2 - 4\zeta^2)u^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Bu u^2 'de kuadrattır ve aşağıdaki köklere sahiptir:

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{(2 - 4\zeta^2) \pm \sqrt{(2 - 4\zeta^2)^2 + 4}}{2} \\ &= (1 - 2\zeta^2) \pm \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \end{aligned} \quad [39]$$

Dolayısıyla ,bant genişliği aşağıdaki gibidir:

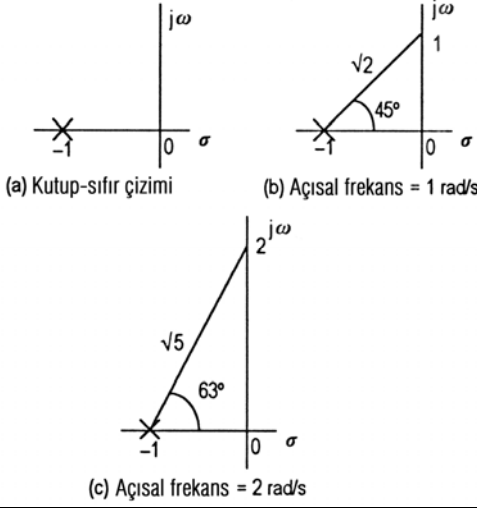
$$\text{bant genişliği} = \omega_n \left[(1 - 2\zeta^2) \pm \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right]^{1/2} \quad [40]$$

Bant genişliği dolayısıyla, doğrudan doğal frekans ω_n ile orantılıdır ve belirli bir ω_n değeri için, sönümleme faktörünün artışıyla azalır.

Frekans tepkisinin grafiksel belirlenmesi

Bir sistemin frekans tepkisinin büyüklük ve fazı bir kutup-sıfır çiziminden grafiksel olarak belirlenebilir. transfer fonksiyonu $G(s)=1/(s+1)$ olan bir sistem düşünün. Bu tip bir sistemde sıfır yoktur ve reel eksen üzerinde, $s = -1$ 'de tek bir kutbu vardır. Kutup-sıfır çizimi dolayısıyla Şekil 7.8(a)'da gösterildiği gibidir. Eğer sistem girdisi sinüzoidal ise $s = j\omega$ 'dir ve bu nedenle $G(j\omega) = 1/(j\omega+1)$ 'dir. $\omega = 1$ rad/s olduğunu varsayarsak, $G(j\omega) = 1/(j1+1) = (1-j1)/2$ olur ve bu nedenle büyüklük $1/\sqrt{2}$ 'tir ve fazı $\tan^{-1}(-1/1) = -45^\circ$ 'dir. Eğer $\omega = 2$ rad/s olursa, $G(j\omega) = 1/(j2+1) = (1-j2)/5$ olur ve bu nedenle büyüklük $1/\sqrt{5}$ 'tir ve fazı $\tan^{-1}(-2/1) = -63^\circ$ 'dir.

Fakat $s = j\omega$, bir noktanın ω açısal frekans değerine bağlı konum olmak üzere, sanal eksen üzerindeki noktaları tanımlar. $\omega = 1$ için, bu tip bir nokta ile kutbu bağlayan bir çizginin uzunluğu $\sqrt{2}$ 'tir. Reel eksenle yaptığı açı $\tan^{-1}(1/1) = 45^\circ$ 'dir. Büyüklük, dolayısıyla kutuptan çizilen çizginin uzunluğunun çarpmaya göre tersidir ve faz kutuptan çizilen çizginin açısının negatifidir. Şekil 5.8(c) $\omega=2$ rad/s için olan çizgiyi gösteriyor. Bu, $\sqrt{5}$ uzunluğuna ve 63° açığa sahiptir ve bu nedenle büyüklük $1/\sqrt{5}$ 'tir ve faz -63° 'dir.



Şekil 5.8 Kutup-sıfır çizimi

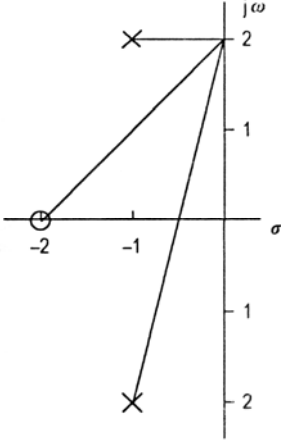
Genelde, bir dizi sıfır ve kutup olacak ve aşağıdaki formda bir transfer fonksiyonu olacaktır.

$$G(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad [41]$$

O halde, özel bir açısal frekans için büyüklük ve faz belirleme prosedürü (7.Bölüm'e bakınız) aşağıdaki gibidir:

- 1 Her bir kutbun ve sıfırın konumunu çizin.
- 2 İlgili açısal frekans için $s = j\omega$ konumunu işaretleyin.
- 3 Her bir kutup ve sıfırdan $s = j\omega$ noktasına çizgiler çizin.
- 4 Her bir çizginin uzunluğunu ve açısını belirleyin.
- 5 Bunun sonucunda büyüklük, sıfırlardan çizilen çizgilerin uzunlukları çarpımının kutuplardan çizilen çizgilerin uzunluklarına oranının K ile çarpımıdır.
- 6 Faz, sıfırlardan çizilen çizgilerin açılarından kutuplardan çizilen çizgilerin açılarının çıkarılmasıyla bulunur.

Şekil 5.9, $\omega = 2$ rad/s açısal frekansı ve transfer fonksiyonu $(s+2)/(s+1+j2)(s+1-j2)$ olan bir sistem için, yukarıdaki durumu örnekliyor. Sıfırdan çizilen çizginin uzunluğu $\sqrt{8}$ açısı 45° 'dir. $1+j2$ kutbundan çizilen çizginin uzunluğu $\sqrt{17}$ açısı 0° 'dir. $1-j2$ kutbundan çizilen çizginin uzunluğu 1 açısı 76° 'dir. büyüklük böylece $\sqrt{8}/\sqrt{17} = 0.69$ 'dir ve faz $45^\circ - 76^\circ = -31^\circ$ 'dir.



Şekil 5.9 Büyüklük ve fazın belirlenmesi

Bode çizimleri

Seri sistemlerden oluşan bir sistem için, toplam transfer fonksiyonu, her bir sistemin transfer fonksiyonlarının çarpımıdır:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)\dots \quad [42]$$

Dolayısıyla: toplam frekans-tepki fonksiyonu, her bir sistemin frekans-tepki fonksiyonlarının çarpımıdır:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega_1)G_2(j\omega_2)G_3(j\omega_3)\dots \quad [43]$$

Ve böylece aşağıdaki denklemi elde etmeliyiz:

$$|G(j\omega)|\angle\phi = |G_1(j\omega_1)|\angle\phi_1 \times |G_2(j\omega_2)|\angle\phi_2 \times |G_3(j\omega_3)|\angle\phi_3 \dots [44]$$

İki kompleks sayı, $z_1 = |z_1| \angle \theta_1$ ve $z_2 = |z_2| \angle \theta_2$ 'nin çarpımı için aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) \text{ ve } z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$$

Bundan dolayı, çarpım aşağıda belirtildiği gibidir:

$$\begin{aligned}
 z &= |z_1|(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) \times |z_2|(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2) \\
 &= |z_1 z_2| [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + j(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\
 &\quad + j^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2] \\
 &= |z_1 z_2| [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\
 &\quad + j(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\
 &= |z_1 z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)]
 \end{aligned}$$

Bunun sonucunda, polar formdaki kompleks sayılar için, aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$z = |z_1 z_2| \angle (\theta_1 + \theta_2) \quad [45]$$

Çarpımın büyüklüğü iki sayının büyüklüklerinin çarpımı ve argümanı iki sayının argümanlarının toplamıdır:

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega_1)| |G_2(j\omega_2)| |G_3(j\omega_3)| \dots \quad [46]$$

ve fazlar için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots \quad [47]$$

Eğer denklem [46]'nın 10 tabanına göre logaritmasını alırsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\lg |G(j\omega)| = \lg |G_1(j\omega_1)| + \lg |G_2(j\omega_2)| + \lg |G_3(j\omega_3)| + \dots \quad [48]$$

O halde, toplam büyüklüğü elde etmek için, frekans tepkisi büyüklüklerini çarpmak yerine, logaritmaları kullanırsak, sadece toplamak yeterli olacaktır. Örnek olarak, eğer toplam frekans tepkisi $3(1 + j\omega)/(2 + j\omega)$ ise, bunu üç seri sistemin sonucu olarak düşünebiliriz; bir tanesinin frekans tepkisi 3, diğerinin frekans tepkisi $(1 + j\omega)$ ve diğeri $1/(2 + j\omega)$. Eğer, her bir eleman için, frekansa bağlı büyüklüğün logaritmik grafiğini çizersek: $3(1 + j\omega)/(2 + j\omega)$ 'nin logaritmik grafiği, üç elemanın logaritmik grafiğinin toplamı olacaktır (denklem [48]). Bir takım ayrı elemanlar olduğu zaman, faz grafiği, sadece ayrı elemanların grafiklerinin toplamıdır (denklem [47]). Büyüklüğü, aşağıda belirtildiği gibi, desibel (dB) cinsinden ifade etmek yaygındır:

$$dB \text{ cinsinden büyüklük} = 20 \lg |G(j\omega)| \quad [49]$$

3 büyüklüğü ile, $20 \lg 3 = 9.5$ olduğundan, büyüklük 3 dB'dir; 10 büyüklüğü ile, $20 \lg 10 = 20$ olduğundan büyüklük 20 dB'dir.

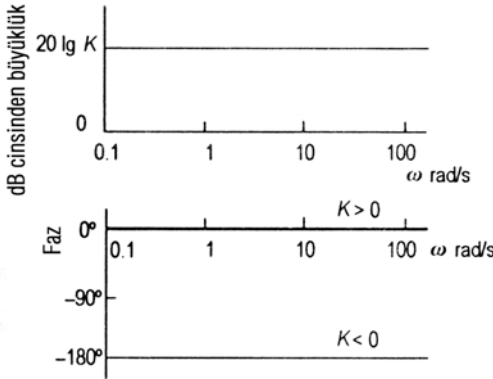
Bode çizimi terimi, büyüklük ve fazın açısal frekans logaritmasına bağlı çizildiği grafikler için kullanılır. Bir sistem için Bode çizimini, sistemi oluşturan elamanları hesaba katarak elde edebileceğimizden; grafikleri, sadece aşağıda verilen terimler cinsinden çizmek yeterlidir:

- 1 Katsayılar
- 2 Orijindeki kutup ve sıfır değerleriyle
- 3 Reel kutup ve sıfır değerleriyle
- 4 Kompleks eşlenik kutup ve sıfır değerleriyle

Fonksiyonlar, bu formlara ayrıştırılabilir ve toplam büyüklük ve faz toplama yoluyla belirlenebilir. Bir sonraki bölüm, belirtilen terimler cinsinden Bode çizimini içeriyor.

Katsayılar

Bunun için $G(s) = K$ 'dır ve bu nedenle $G(j\omega) = K$ 'dır. büyüklük $|G(j\omega)| = K = 20 \lg K$ dB'dir ve K pozitif ise faz $= 0^\circ$, K negatif ise -180° 'dir. Bode çizimi Figür 6.10'da gösteriliyor. $K = 10$ için büyüklük 20 dB'de sabit bir çizgidir ve faz 0° 'de sabit bir çizgidir.



Şekil 5.10 Sabit kazanç için Bode çizimi

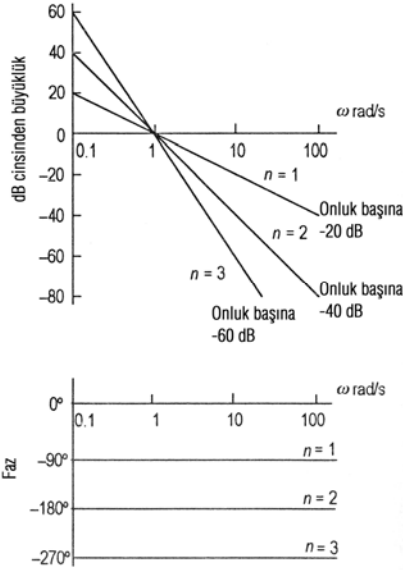
6.7.2 Orijindeki kutup ve sıfırlar

Orijinde bir kutba sahip bir sistem, transfer fonksiyonunda $1/s$ formunda bir ifade içerecektir; bir sıfıra sahip bir sistem, transfer fonksiyonunda s formunda bir ifade içerecektir. Eğer orijinde birden fazla kutup varsa, bu, n bu tip pole sayısı olmak üzere, $1/s^n$ olacak, birden fazla sıfır varsa, m bu tip sıfır sayısı olmak üzere s^m olacaktır.

Orijindeki kutuplar için, $G(j\omega) = 1/(j\omega)^n = -(j\omega)^n$ olur. Bu tip bir sistem için büyüklük aşağıdaki gibidir:

$$|G(j\omega)| = 20 \lg(1/\omega)^n = -20n \lg \omega \text{ dB} \quad [50]$$

ve faz $-n90^\circ$ 'dir. Denklem [50], doğrusal bir çizgi tanımlar. $\omega = 1$ rad/s olduğu zaman, büyüklük 0'dır ve $\omega = 10$ rad/s olduğu zaman, büyüklük $-20n$ dB'dir. Dolayısıyla, çizgini eğimi, her bir 10 misli frekans artışı için $-20n$ 'dir (bu decade/(10luk birim) olarak tanımlanır). Figür 5.11 Bode çizimini gösteriyor.

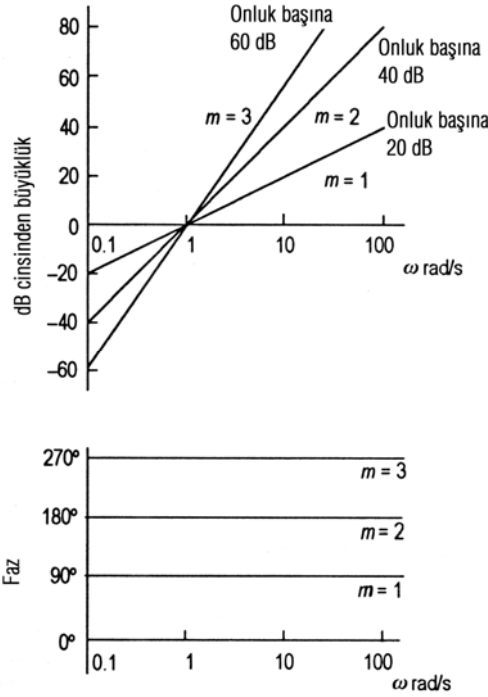


Figür 6.11 Orijindeki kutuplar için Bode çizimi

Orijindeki sıfırlar için, $G(j\omega) = (j\omega)^m$ olur. Bu tip bir sistem için büyüklük aşağıdaki gibidir:

$$|G(j\omega)| = 20 \lg \omega^m = 20m \lg \omega \text{ dB} \quad [51]$$

ve faz $-m90^\circ$ 'dir. Denklem [51], doğrusal bir çizgi tanımlar. $\omega = 1$ rad/s olduğu zaman, büyüklük 0'dır ve $\omega = 10$ rad/s olduğu zaman, büyüklük $-20m$ dB'dir. Dolayısıyla, çizgini eğimi, her bir 10 misli frekans artışı için $-20m$ 'dir. Figür 6.12 Bode çizimini gösteriyor.



Şekil 5.12 Orijindeki sıfırlar için Bode çizimi

Reel kutup ve sıfır değerleri

Reel bir kutup, τ zaman sabiti olmak üzere $1/(1 + \tau s)$ formunda bir terime sahip transfer fonksiyonu demektir. Frekans tepkisi dolayısıyla aşağıdaki gibidir:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad [52]$$

Bu, dB cinsinden aşağıdaki büyüklüğe karşılık gelir:

$$büyüklük = 20 \lg \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right) = -10 \lg(1 + \omega^2 \tau^2) \quad [53]$$

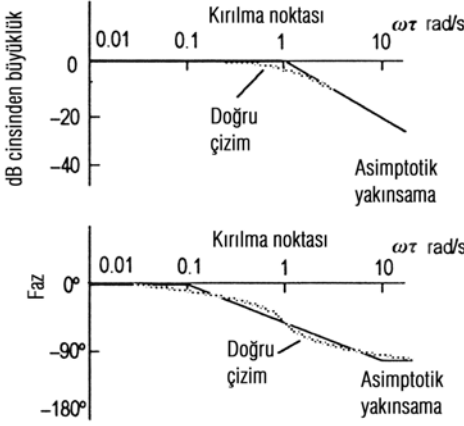
ve fazı $\tan^{-1} -\omega \tau$ 'dir.

$\omega \ll 1/\tau$ olduğu zaman $\omega^2 \tau^2$ 1'e göre ihmal edilebilir ve bu nedenle denklem [53], büyüklüğü 0 dB olarak verir. Böylece, düşük frekanslarda, Bode çizimi, sabit değeri 0 olan doğrusal bir çizgidir. Yüksek frekanslar için, $\omega \gg 1/\tau$ olduğu zaman, $\omega^2 \tau^2$ 1'den çok daha büyük bir değerdir ve bu nedenle 1'i ihmal edebiliriz ve büyüklük $-20 \lg \omega \tau$ 'dir. Bu, eğimi decade(onluk) başına -20 dB olan ve $\omega \tau = 1$ olduğu zaman sıfır desibel çizgisi ile kesişen doğrusal bir çizgidir. Şekil 5.13, düşük ve yüksek frekanslar için, $\omega = 1/\tau$ 'de kesişen ve kesişim noktası *kırılma noktası* veya *köşe frekansı* olarak adlandırılan, bu çizgileri gösteriyor. İki çizgi, gerçek çizime *asimptotik yakınsama* olarak adlandırılır. Gerçek çizim, kırılma noktasında 3 dB olan maksimum hataya sahiptir. Tablo 5.1, asimptotları kullanarak bulunan hataları verir.

Düşük frekanslarda, ω yaklaşık $0.1/\tau$ 'den küçük olduğu zaman, faz açısı hemen hemen 0° 'dir. Yüksek frekanslarda, ω yaklaşık $10/\tau$ 'den büyük olduğu zaman, açı hemen hemen -90° 'dir. Bu frekanslar arasında faz açısının, makul bir doğrusal çizgi olacağı düşünülebilir. Doğrusal bir çizgi varsayımındaki maksimum hata $5 \frac{1}{2}^\circ$ 'dir. $\omega \tau = 1$ olduğu zaman, faz açısı 45° 'dir. Tablo 5.1, asimptotları kullanarak bulunan hataları vermektedir.

Tablo 5.1 *Asimptot hataları*

w	Büyüklük hatası	Faz hatası
	dB	
0.10/ τ	-0.04	-5.7°
0.20/ τ	-0.02	+2.3°
0.50/ τ	-1.0	+4.9°
1.00/ τ	-3.0	0°
2.0/ τ	-1.0	-4.9°
5.0/ τ	-0.2	-2.3°
10.0/ τ	-0.04	+5.7°



Şekil 5.13 *Reel bir kutup için Bode çizimi*

Reel bir sıfır, τ zaman sabiti olmak üzere $(1 + \tau s)$ formunda bir terime sahip transfer fonksiyonu demektir. Frekans tepkisi dolayısıyla aşağıdaki gibidir:

$$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau \quad [54]$$

Bu, dB cinsinden aşağıdaki büyüklüğe karşılık gelir:

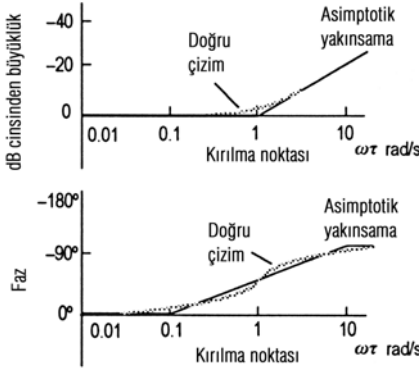
$$\text{büyüklük} = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} = 10 \lg(1 + \omega^2 \tau^2) \quad [55]$$

ve fazı $\tan^{-1} \omega\tau$ 'dir.

$\omega \ll 1/\tau$ olduğu zaman $\omega^2 \tau^2$ 1'e göre ihmal edilebilir ve bu nedenle denklem [53], büyüklüğü 0 dB olarak verir. Böylece, düşük frekanslarda, Bode çizimi, sabit değeri 0 olan doğrusal bir çizgidir. Yüksek frekanslar için, $\omega \gg 1/\tau$ olduğu zaman, $\omega^2 \tau^2$ 1'den çok büyük bir değerdir ve bu nedenle 1'i ihmal edebiliriz ve büyüklük $20 \lg \omega\tau$ 'dir. Bu, eğimi decade(onluk) başına +20 dB olan ve $\omega\tau = 1$ olduğu zaman sıfır desibel çizgisi ile kesişen doğrusal bir çizgidir. Figür 5.14, düşük ve yüksek frekanslar için, $\omega = 1/\tau$ 'de kesişen ve kesişim noktası *kırılma noktası* veya *köşe frekansı* olarak adlandırılan, bu çizgileri gösteriyor. İki çizgi, gerçek çizime

asimptotik yakınsama olarak adlandırılır. Gerçek çizim, kırılma noktasında 3 dB olan maksimum hataya sahiptir. Hatalar Tablo 5.1’de verilenlerle aynıdır.

Düşük frekanslarda, ω yaklaşık $0.1/\tau$ ’den küçük olduğu zaman, faz açısı hemen hemen 0° ’dir. Yüksek frekanslarda, ω yaklaşık $10/\tau$ ’den büyük olduğu zaman, açı hemen hemen $+90^\circ$ ’dir. Bu frekanslar arasında faz açısının, makul bir doğrusal çizgi olacağı düşünülebilir. Doğrusal bir çizgi varsayımındaki maksimum hata $5\frac{1}{2}^\circ$ ’dir. $\omega\tau = 1$ olduğu zaman, faz açısı 45° ’dir. Tablo 5.1’de hatalar verilmiştir.



Şekil 5.14 Reel bir sıfır için Bode çizimi

Kompleks eşlenik kutup ve sıfırlar

Bir çift kompleks kutup eşleniği bulunan bir sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki formdadır:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ve böylece frekans tepkisi de aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} \\
 &= \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega/\omega_n)]} \\
 &= \frac{[1 - (\omega/\omega_n)^2] - j[2\zeta(\omega/\omega_n)]}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \quad [56]
 \end{aligned}$$

Bundan dolayı, desibel cinsinden büyüklüğü aşağıda verildiği gibidir:

$$\begin{aligned}
 \text{büyüklük} &= 20 \lg \sqrt{\frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \\
 &= -10 \lg \{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2\} \quad [57]
 \end{aligned}$$

ve fazı da aşağıda verildiği gibidir:

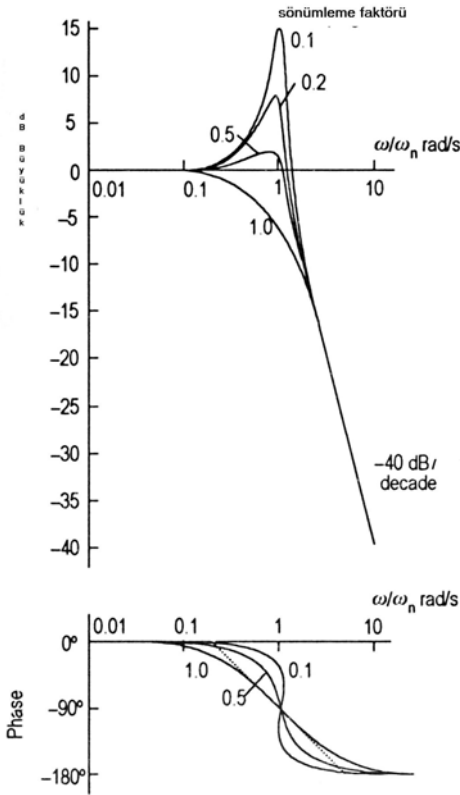
$$\text{faz} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad [58]$$

$\omega/\omega_n \ll 1$ için, büyüklük 0 dB'ye yakınsar ve böylece düşük frekanslarda asimptotik yakınsama 0 dB'de doğrusal bir çizgidir. $\omega/\omega_n \gg 1$ için, büyüklük $-40 \lg (\omega/\omega_n)$ dB'ye yakınsar. Böylece yüksek frekanslarda, asimptotik yakınsama, asimptotik yakınsama decade(onluk) başına -40 dB olan doğrusal bir çizgidir. Bu iki çizginin kesişimi, $\omega/\omega_n=1$ 'de bir kırılma noktasıdır. Gerçek değer, buna rağmen, sönümlleme oranına bağlıdır. Figür 5.15, farklı sönümlleme faktörleri için, asimptotları ve bazı gerçek çizimleri gösteriyor.

Tablo 5.2, bir takım bozunma katsayıları için, 0 dB ve -40 dB/decade(onluk) çizgileri ve gerçek büyüklük çizimi arasındaki hataları veriyor.

Tablo 5.2 dB cinsinden büyüklükler için asimptot hataları

ζ	w/ω_n						
	0.10	0.20	0.50	1.00	2.00	5.00	10.00
1.0	-0.09	-0.34	-1.92	-6.0	-1.92	-0.34	-0.09
0.7	0	-0.01	-0.26	-3.0	-0.26	-0.01	0
0.5	+0.04	+0.17	+0.90	0	+0.90	+0.17	+0.04
0.3	+0.07	+0.29	+1.85	+4.4	+1.85	+0.29	+0.07

**Şekil 5.15** Bir çift kompleks kutup için Bode çizimi

Denklem [58], $\omega/\omega_n \ll 1$ için fazı yaklaşık olarak sabit, 0° verir ve $\omega/\omega_n \gg 1$ için yaklaşık -180° verir. Genellikle, bir asimptot

çizgisi, $\omega/\omega_n = 0.2$ 'de 0° olarak ve $\omega/\omega_n = 5$ 'de -180° olarak çizilir. Bu çizgi ve deneme faz çizimleri arasındaki farklar tablo 5.3'te gösteriliyor.

Tablo 6.3 *derece cinsinden faz başına asimptot hataları*

ζ	ω/ω_n						
	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0
1.0	-11.4	-22.6	-1.6	0	-1.6	+22.6	+11.4
0.7	8.1	-16.4	-19.6	0	-19.6	+16.4	+8.1
0.5	+5.8	+15.3	+29.2	0	-29.2	+15.3	+5.8
0.3	+3.5	+22.3	+41.1	0	-41.1	+22.2	+3.5

Bir çift kompleks sıfır eşleniği, aşağıdaki forma sahip bir transfer fonksiyonu olan sistemlerde görülür:

$$G(s) = \frac{s^2 + j2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

ve böylece frekans tepkisi aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2}{\omega_n^2} \\ &= [1 - (\omega/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega/\omega_n)] \end{aligned} \quad [59]$$

Desibel cinsinden büyüklük dolayısıyla aşağıda belirtildiği gibidir:

$$\begin{aligned} \text{büyüklük} &= 20 \lg \sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \\ &= 10 \lg \{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2\} \end{aligned} \quad [60]$$

Ve faz da aşağıda belirtildiği gibidir:

$$\text{faz} = \tan^{-1} \left[\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \quad [61]$$

Büyüklük, kompleks kutuplardan (denklem [57]) sadece eksi yerine artı olması yönüyle farklıdır. Dolayısıyla büyüklük çizimi, sadece, 0 dB çizgisi yakınında, şekil 5.15'in ayna görüntüsü olur. Faz,

kompleks kutuplardan (denklem [58]) sadece eksi yerine artı olması yönüyle farklıdır. Dolayısıyla faz çizimi, sadece, 0° çizgisi yakınında, Şekil 5.15'in ayna görüntüsü olur. Gerçek çizimlerin asimptot çizgilerinden farkı Tablo 5.2 ve Tablo 5.3'teki verilerle aynı olur.

Karma bir Bode çizim örneği

Aşağıdaki transfer fonksiyonuna sahip bir sistemin Bode çizimini belirlemeyi düşünelim:

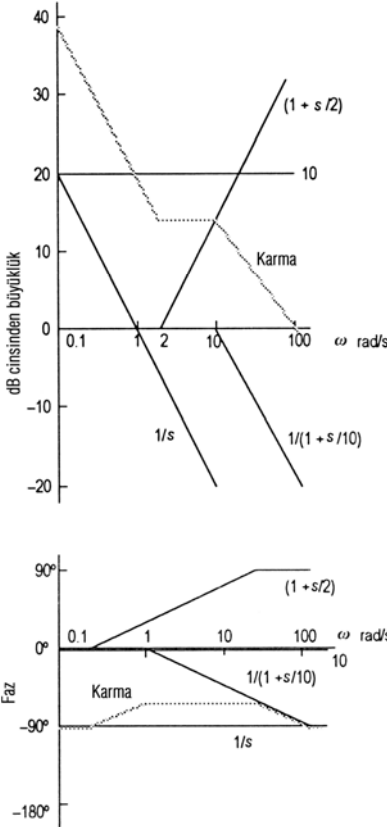
$$G(s) = \frac{50(s+2)}{s(s+10)}$$

Bu, aşağıda belirtildiği üzere, dört elemanın çarpımı olarak düşünülebilir:

$$G(s) = 10 \times (1 + \frac{1}{2}s) \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{1+s/10}$$

Bode çizimini, her bir eleman için yapabiliriz ve toplam çizimi elde etmek için bunları toplarız. Şekil 5.16, sonucu gösteriyor.

- 1 $G_1(s) = 10$ için, $20 \lg 10 = 20$ dB büyüklüğünde ve 0° sabit fazında doğrusal bir çizgimiz var.
- 2 $G_2(s) = 1 + \frac{1}{2}s$ için, $\omega\tau \ll 1$ olduğu zaman 0 dB büyüklüğümüz ve $\omega\tau \gg 1$ olduğu zaman $+20 \lg \omega\tau = +20$ dB/decade(onluk) eğiminde bir çizgimiz var. Kırılma noktası $\omega = 1/\tau = 0.2$ rad/s'dir. Faz, $0.1/\tau = 0.2$ rad/s'ye kadar 0° 'dir ve $10/\tau = 20$ rad/s'den büyük frekanslar için $+90^\circ$ 'dir.
- 3 $G_3(s) = 1/s$ için, $\omega = 1$ rad/s'de 0 dB noktasından geçen, eğimi -20 dB/decade(onluk) olan doğrusal bir çizgimiz var.
- 4 $G_4(s) = 1/(1 + s/10)$ için, $\omega\tau \ll 1$ olduğu zaman 0 dB büyüklüğümüz ve $\omega\tau \gg 1$ olduğu zaman $-20 \lg \omega\tau = -20$ dB/decade(onluk) eğiminde bir çizgimiz var. Kırılma noktası $\omega = 1/\tau = 10$ rad/s'dir. Faz, $0.1/\tau = 1$ rad/s'ye kadar 0° 'dir ve $10/\tau = 100$ rad/s'den büyük frekanslar için -90° 'dir.



Şekil 5.16 Karma Bode çizimi

Transfer fonksiyonlarının deneysel belirlenmesi

Eğer bir sisteme değişken frekanslı bir sinüzoidal sinyal uygulanırsa ve çıktı büyüklük ve fazı gözlenirse; bir Bode diyagramı çizilebilir. Sistem transfer fonksiyonu, asimptotları çizimlere uyarlayarak ve bunun sonucunda hangi formda bir transfer fonksiyonun gözlenen sonucu verdiğini belirleyerek elde edilebilir.

- 1 Asimptotlar, eğimlerinin ± 20 dB/decade(onluk) olmak zorunda olduğu göz önüne alınarak, büyüklük çizimi üzerine çizilir. Gradyanın $+20$ dB/decade(onluk) olduğu zaman için,

asimptotları yerleştirirken, gerçek çizim, asimptotların köşelerinin yaklaşık 3 dB içinde olmalıdır.

- 2 Düşük frekanslarda büyüklük çiziminin gradyanını inceleyin.
 - (a) Eğer sıfır ise, bu çizim, s veya $1/s$ terimi içermeyen Tip 0 sistem içindir. Eğer çizgi x dB'de yataysa, transfer fonksiyonu $20 \lg K = x$ olmak üzere, bir K kazancına sahiptir.
 - (b) Eğer gradyan -20 dB/decade(onluk) ise sistem, K/s formunda bir transfer fonksiyonuna sahiptir. Gerektiğinde uzatılarak, asimptotun 0 dB çizgisiyle kesiştiği frekansın sayısal olarak $\sqrt{K}$ 'ya eşit olduğu görülür. Aynı zamanda, gerektiğinde uzatılarak, asimptotun $\omega=1$ için $20 \lg K$ büyüklüğüne sahip olduğu görülür.
 - (c) Eğer gradyan -40 dB/decade(onluk) ise sistem, K/s^2 formunda bir transfer fonksiyonuna sahiptir. Gerektiğinde uzatılarak, asimptotun 0 dB çizgisiyle kesiştiği frekansın sayısal olarak $\sqrt{K}$ 'ya eşit olduğu görülür. Aynı zamanda, gerektiğinde uzatılarak, asimptotun $\omega=1$ için $20 \lg K$ büyüklüğüne sahip olduğu görülür.
- 3 Büyüklük çiziminin gradyanının değiştiği frekansları belirleyin.
 - (a) Eğer gradyan, bir ω_1 frekansında -20 dB/decade(onluk) değişmiş ise, transfer fonksiyonunda $1/(1 + s/\omega_1)$ faktörü vardır.
 - (b) Eğer gradyan, bir ω_2 frekansında $+20$ dB/decade(onluk) değişmiş ise, transfer fonksiyonunda $(1 + s/\omega_2)$ faktörü vardır.
 - (c) Eğer gradyan, bir ω_3 frekansında -40 dB/decade(onluk) değişmiş ise, transfer fonksiyonunda $1/(s^2 + 2\zeta\omega_3s + \omega_3^2)$ faktörü vardır. Sönümleme faktörü çizimi Figür 6.15 ile karşılaştırarak elde edilebilir.
 - (d) Eğer gradyan, bir ω_4 frekansında $+40$ dB/decade(onluk) değişmiş ise, transfer fonksiyonunda $(s^2 + 2\zeta\omega_4s + \omega_4^2)$ faktörü vardır. Sönümleme faktörü çizimi Figür 6.15'in ayna görüntüsü ile karşılaştırarak elde edilebilir.
- 4 Faz çizimi, büyüklük çiziminden elde edilen sonuçları kontrol etmek için kullanılabilir.

Zaman gecikmesi

Eğer transfer fonksiyonu $G(s)$ olan bir sistemdeki bir eleman, sistemde bir T zaman gecikmesi meydana getiriyorsa, zaman kaydırma teoremi (3.Bölümde) toplam transfer fonksiyonunu aşağıda belirtilen forma getirir:

$$T(s) = G(s)e^{-sT} \quad [62]$$

Frekans tepkisi de aşağıdaki gibi olur:

$$T(j\omega) = G(j\omega)e^{-j\omega T} \quad [63]$$

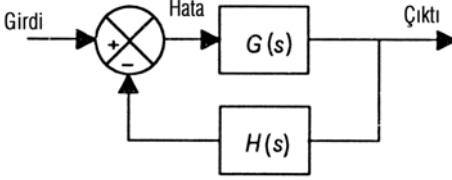
Eğer $G(j\omega)$ ve $e^{-j\omega T}$ elemanlarını düşünürsek, gecikme fonksiyonu sadece bir zaman gecikmesi oluşturur, üstel terim 1 büyüklüğüne ve ωT radyan fazına sahiptir. Dolayısıyla, $T(j\omega)$ 'nin büyüklüğü, bütün frekanslarda $G(j\omega)$ ile aynıdır ve fazı $G(j\omega)$ 'nin faz değerlerinden, bütün frekanslarda, ωT radyan çıkarılarak elde edilir. Bundan dolayı, bir zaman gecikmesi oluşturmanın bir Bode çizimine etkisi, büyüklüğü değiştirmez fakat frekans arttıkça faz çizimi hızla eksi sonsuza doğru azalır.

6. Kararlılık ve frekans Düzlemi

Kararlılık

Birim geri besleme olmayan kapalı-döngü bir sistem (Şekil 6.1) düşünün. Kapalı döngü transfer fonksiyonu:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad [1]$$



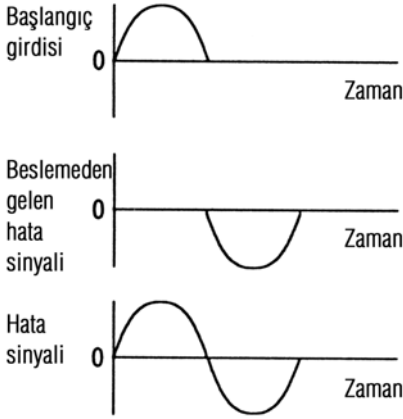
Şekil 6.1 Kapalı-döngü sistem

Özel bir frekansta, yarı-doğrultmalı redresör/dogrultmaç, bir sinüzoidal sinyal (şekil 6.2) şeklinde düşünülebilecek kısa bir darbe girdimizin olduğunu varsayalım. Bu, $G(s)$ üzerinden geçerek, bir çıktı verir ve bu çıktı $H(s)$ üzerinden geri beslenir. Bunun genliğinin girdinin genliği ile aynı kalacak şekilde değişmeden geri döndüğünü fakat fazının sıfır girdi sinyalinden çıkarıldığında, sonuç olarak sadece ilk yarı-doğrultmalı redresörle, darbeyi devam ettiren bir hata sinyali elde ettiğimizi düşünelim. Bu geri besleme döngüsü etrafında tekrar sinyali devam ettirebileceği anda gelecek ve sinyali devam ettirecek. Burada tek başına bir salınım mevcuttur.

Eğer geri beslenen sinyal, ilk darbe genliğinden küçük bir genliğe sahipse; sinyal zamanla yok olacaktır. Sistem kararlıdır. Eğer geri beslenen sinyal, ilk darbe genliği ile aynı büyüklükte bir genliğe sahipse; salınım sabit bir genlikle devam edecek ve sistem marjinal kararlı olacaktır. Eğer geri beslenen sinyal, ilk darbe genliğinden büyük bir genliğe sahipse, salınım artan bir genlikle devam edecek ve sistem kararsız kalacaktır. Dolayısıyla, kararsızlık için koşul, seri

$G(s)$ ve $H(s)$ düzeni üzerinden beslenen sinyalin oluşturduğu büyüklüğün 1'den büyük olmasıdır. Buna ek olarak, geri beslenen sinyalin, salınıma devam edebilmek için sağ faz olması koşulu vardır. Bu, $G(s)H(s)$ 'e geri beslenen sinyalin -180° 'lik bir faz kaybının olması anlamına gelir.

$G(s)$ ile seri olan $H(s)$ için transfer fonksiyonu, *açık-döngü transfer fonksiyonu* olarak adlandırılır. Kararlılık kriteri, dolayısıyla aşağıda belirtildiği gibi ifade edilebilir:



Şekil 6.2 Tek başına devamlı salınımlar

Kararlı sistemleri kararsız sistemlerden ayıran kritik nokta, açık-döngü faz kaymasının -180° ve açık-döngü büyüklüğünün 1 olduğu zamandır.

İyi ve kararlı bir kontrol sistemi, belirgin biçimde 1'den küçük açık-döngü büyüklüğüne sahiptir; tipik olarak 0.4 ile 0.5 arasında ve -115° ile -125° arasında bir açık-döngü fazına sahiptir. Bu tip değerler, bir birim adım girdisinde, % 20 ile 30 arasında yükselme miktarı veren, bir nebze alt sönümlü sistem tanımlar.

Kararlılık ve Bode çizimleri

Açık-döngü transfer fonksiyonu için Bode çizimi, sistemin kararlılığının bir ölçütü olarak kullanılabilir. Aşağıdaki terimler, Bode çizimi üzerindeki kritik noktaları tanımlamak için kullanılır:

1 Faz geçiş frekansı

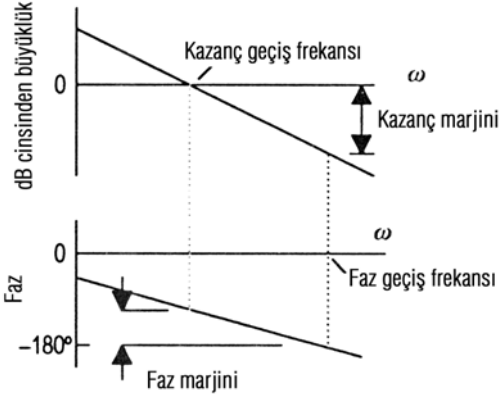
Faz geçiş frekansı, faz çiziminde, fazın ilk kez -180° değerine ulaştığı frekanstır.

2 Kazanç Marjini

Bu faktör, faz geçiş frekansındaki büyüklüğün 1 olması için gereken çarpandır.

3 Kazanç geçiş frekansı

Bu, büyüklük çiziminde, açık-döngü büyüklüğünün ilk kez 1 değerine ulaştığı frekanstır.



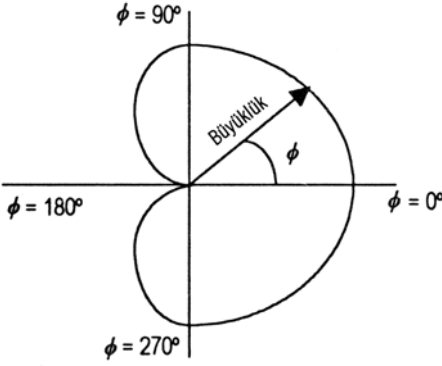
Şekil 6.3 Bir Bode Çiziminde kararlılık terimleri

4 Faz Marjini

Bu, kazanç geçiş frekansında, faz açısının -180° 'den kaç derece küçük olduğudur.

Polar Çizim

Bir sistemin frekans tepkisinin polar çizimi, frekans 0'dan sonsuza giderken, uzunlukları sistemin büyüklüğünü, yani genlik kazancını veren ve kendi fazlarına göre açılarda çizilen fazörlerin uçlarını takip edecek şekilde çizilen çizgidir.

**Figür 7.4** Polar çizim

Bir örnek olarak, transfer fonksiyonu $1/(1 + \tau s)$ olan birinci derece bir sistemi düşünün. Frekans tepkisi aşağıdaki gibidir (Bölüm 5'e bakınız):

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} - j\frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad [2]$$

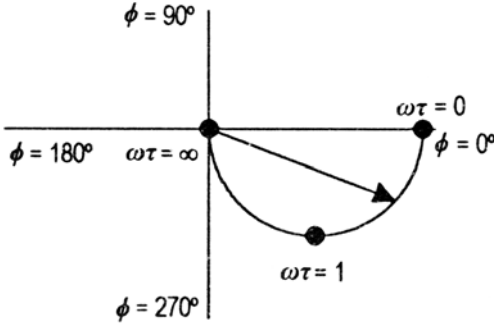
Dolayısıyla büyüklük aşağıda verildiği gibidir:

$$büyüklük = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad [3]$$

ve faz da:

$$faz = -\tan^{-1} \omega\tau \quad [4]$$

Sıfır frekansında, büyüklük 1'dir ve faz 0° 'dir. Sonsuz frekansta, büyüklük sıfırdır ve faz -90° 'dir. $\omega\tau = 1$ olduğu zaman, büyüklük $1/\sqrt{2}$ 'dir ve faz -45° 'dir. Diğer değerlerin yerine konması, bizi Şekil 6.5'te gösterilen yarım daire çizimine ulaştırır.



Şekil 6.5 Birinci-derece sistem

Daha ileri bir örnek için, transfer fonksiyonu $1/s(s + 1)$ olan bir sistem için polar çizimi düşünün. Bu sistemin frekans tepkisi aşağıda belirtildiği gibidir:

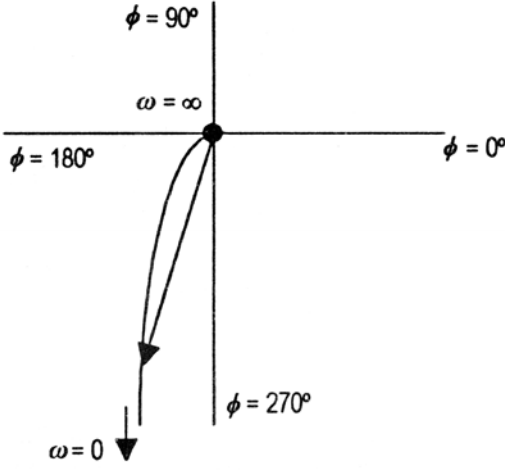
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)} = \frac{1}{j\omega - \omega^2} = \frac{\omega^2 - j\omega}{\omega^2 + \omega^4} \quad [5]$$

Dolayısıyla büyüklük ve fazı aşağıdaki gibidir:

$$\text{büyüklük} = \frac{1}{\omega\sqrt{1 + \omega^2}} \quad [6]$$

$$\text{faz} = -\tan^{-1} 1/(-\omega) = 180^\circ + \tan^{-1} 1/\omega \quad [7]$$

$\omega = \infty$ olduğu zaman, büyüklük 0'dır ve faz 0° 'dir. ω sıfıra yaklaştıkça, büyüklük sonsuza ıraksar ve faz 270° 'ye veya -90° 'ye yaklaşır. Şekil 6.6, polar çizimi gösteriyor.



Şekil 6.6 Polar çizim

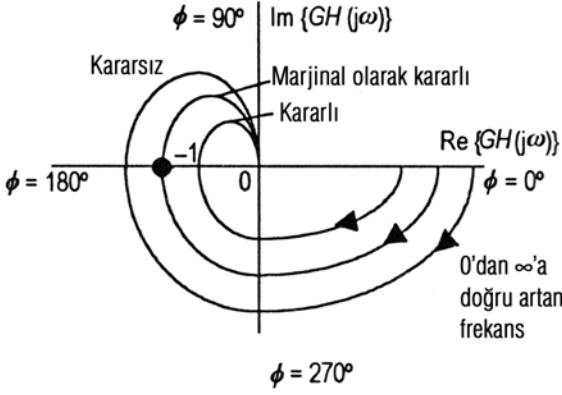
$G(j\omega)$ çiziminin orijininin $-a$ 'ya kaymış hali, a bir sabit olmak üzere, $G(j\omega) + a$ için çizilen polar çizimi olması, yararlı bir özelliktir.

Basitleştirilmiş Nyquist kararlılık kriteri

Bölümün başında belirtildiği gibi: kararlı sistemleri kararsız sistemlerden ayıran kritik nokta, açık-döngü fazının -180° olduğu ve açık-döngü büyüklüğünün 1 olduğu yerdir. Eğer açık-döngü frekans tepkisinin bir polar diyagramı çizilirse, sistemin kararlı olması için, uzunluğu 1'den büyük olan ve fazı -180° olan bir fazör bulunmamalıdır. Dolayısıyla, fazörlerin uçlarını takip ederek çizilen yer eğrisi olarak tanımlanan çizgi, -1 noktasını, kapsamamalıdır.

ω 0'dan ∞ 'a giderken, açık-döngü frekans tepkisi $G(j\omega)H(j\omega)$ yer eğrisi, -1 noktasını kapsamayan kapalı-döngü sistemler, kararlıdır, -1 noktasını kapsayan sistemler kararsızdır ve -1 noktasından geçen sistemler marjinal kararlıdır. Noktayı kapsamak, noktanın soluna geçmek olarak alınabilir.

Yukarıdaki ifade, basitleştirilmiş Nyquist kriteri olarak bilinir ve açık-döngüsü kararlı olan sistemlerle sınırlıdır; yani s-düzleminin sağ tarafında açık-döngü kutbu olmayan sistemler için.



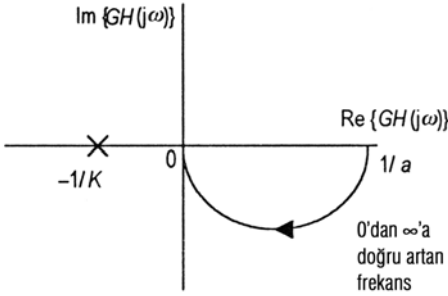
Şekil 6.7 Kararlılık

Şekil 6.7, yukarıda açıklanan ifadeyi, kararlı marjinal kararlı ve kararsız sistemler için örnekliyor. Nyquist çizimleri, ölçek olmaksızın, kararlı çizim için $K = 10$, marjinal kararlı çizim için $K = 136.8$ ve kararsız çizim için $K = 500$ olmak üzere, aşağıdaki açık-döngü frekans tepkisine karşılık gelir.

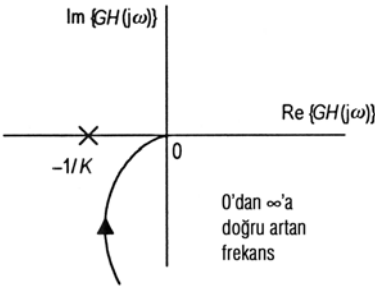
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j0.2)(1 + j\omega)(1 + j\omega 10)}$$

Nyquist çiziminin dikey eksenini 90° faza ve bu nedenle, açık-döngü frekans tepkisinin sanal kısmına karşılık gelir. Yatay eksen 0° faza ve bu nedenle, açık-döngü frekans tepkisinin reel kısmına karşılık gelir.

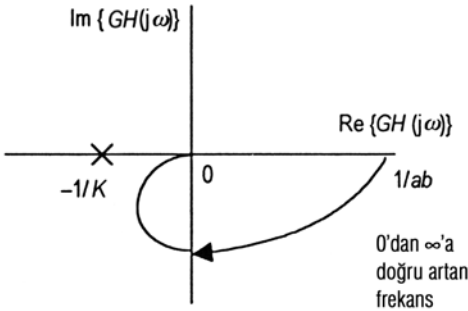
6.8'den 6.12'ye kadar olan şekiller, yaygın açık-döngü frekans tepkileri formları için, Nyquist çizimi örneklerini gösteriyor.



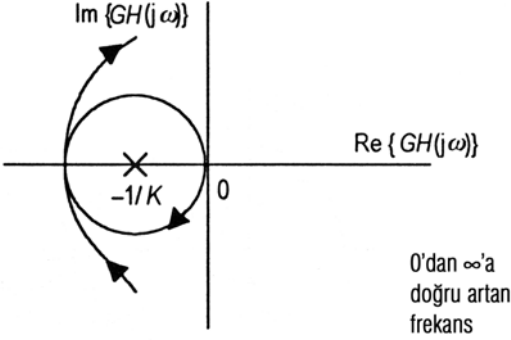
Şekil 6.8 $G(s)H(s) = K/(s+a)$, $K>0$ olmak üzere, K 'nın bütün değerleri için kararlıdır



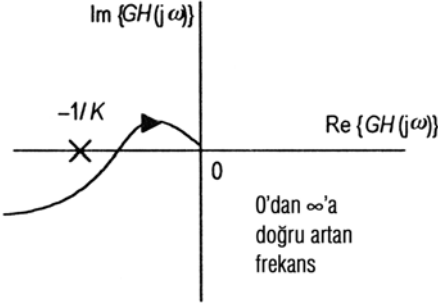
Şekil 6.9 $G(s)G(s) = K/s(s+a)$, $K>0$ olmak üzere, K 'nın bütün değerleri için kararlıdır



Şekil 6.10 $G(s)H(s) = K/(s+a)(s+b)$, $K>0$ olmak üzere, K 'nın bütün değerleri için kararlıdır



Şekil 6.11 $G(s)H(s) = K / s(s+a)(s+b)$, K 'nın büyük değerleri için kararsız, fakat K değeri azaltılırsa kararlı hale gelebilir



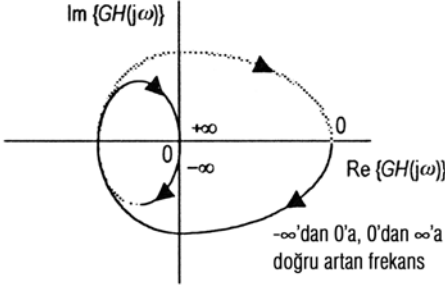
Şekil 6.12 $G(s)H(s) = K(s+c) / s^2(s+a)(s+b)$, küçük K 'lar için kararlı, fakat K arttırılırsa kararsız hale gelebilir

Tam Nyquist kararlılık kriteri

Bu, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

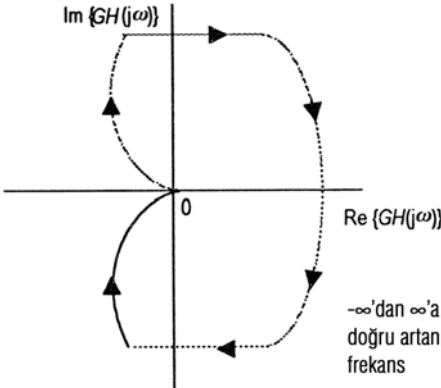
Kapalı-döngü bir sistemin kararlı olabilmesi için, açık-döngü frekans tepkisi $G(j\omega)H(j\omega)$ yer eğrisi, $G(s)H(s)$ 'in pozitif reel kısmı olan kutup sayısından az olmamak koşulu ile, $(-1, j0)$ noktasında, ω 0'dan ∞ 'a giderken, saat yönünde bir takım kuşatan daireler tanımlamalıdır. Nokta, ω $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a giderken, eğer yer eğrisinin yolu içinde ise, daire tarafından kuşatılmıştır denir.

Şekil 6.7’de verilen Nyquist çizimi, ω ’nin 0’dan $+\infty$ ’a değişimi içindir. ω ’nin 0’dan $+\infty$ ’a değişimi için çizilen çizim, reel eksen üzerinden yansıtılan ayna görüntüsüdür. Dolayısıyla tam Nyquist çizimi, Şekil 6.13’te gösterildiği gibi, açık-döngü frekans tepkilerinin birisi içindir.



Şekil 6.13 Bütün olarak Nyquist çizimi

Aynı zamanda, sonsuzda kalan bağlantısız çizgileri bağlama işlemiyle yolu tamamen kapatmak gerekebilir. Şekil 6.14, bu durumu, Şekil 6.9’daki çizim için gösteriyor.



Şekil 6.14 Bütün olarak Nyquist çizimi

Örnek olarak, açık-döngü transfer fonksiyonu $K/(s+1)(s+2)(s+3)$ olan bir sistemi düşünün. Açık-döngü frekans tepkisi aşağıdaki gibidir:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)} \quad [8]$$

Polar çizimi hesaba katarak Nyquist çizimini elde edebiliriz. Büyüklük aşağıdaki gibidir:

$$\text{büyüklük} = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)}} \quad [9]$$

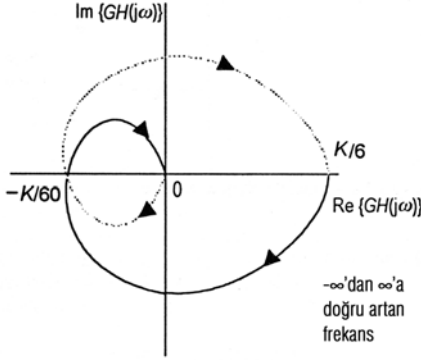
ve faz da aşağıdaki gibidir:

$$\text{faz} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right) \quad [10]$$

$\omega = 0$ olduğu zaman, büyüklük denklem [8] ile $K/6$ olarak bulunur ve faz denklem [9] ile 0° olarak bulunur. $\omega = \infty$ olduğu zaman, büyüklük 0 'dır ve faz 270° 'dir. Polar grafiği çizmek için bu değerleri ve diğer noktaları kullanabiliriz. Alternatif olarak, frekans tepkisini reel ve sanal kısımlar olmak üzere düşünebiliriz. Dolayısıyla denklem [8] aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{6K(1-\omega^2)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)} + j \frac{\omega K(\omega^2-11)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)} \quad [11]$$

$\omega = 0$ olduğu zaman, sanal kısım 0 'dır ve reel kısım $K/6$ 'dır. $\omega = \infty$ olduğu zaman, sanal kısım 0 'dır ve reel kısım 0 'dır. $\omega = \sqrt{11}$ olduğu zaman sanal kısım 0 'dır. Bu $-K/60$ olan reel bir kısımdır, yani büyüklüktür ve çizimin reel eksenle kesiştiği noktadadır. Dolayısıyla kararlı bir sistem için, $-K/60$, 1 'den küçük olmalıdır, yani K , 60 'tan küçük olmalıdır. Şekil 6.15 tam Nyquist çizimini gösteriyor (ölçü olmaksızın).



Şekil 6.15 Bütün olarak Nyquist çizimi

Nyquist kararlılığı ve s-düzlemi

Açık-döngü transfer fonksiyonu aşağıda belirtilen genel formda olan bir sistem düşünün:

$$G(s)H(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad [12]$$

Kapalı-döngü transfer fonksiyonunun paydası (denklem [1]), $1 + G(s)H(s)$ 'tir. Dolayısıyla:

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 1 + K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \\ &= \frac{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n) + K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \\ &= \frac{(s + z'_1)(s + z'_2) \dots (s + z'_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad [13] \end{aligned}$$

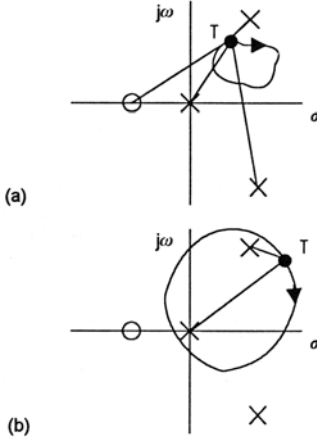
Kapalı-döngü transfer fonksiyonu $T(s)$, aşağıdaki gibidir:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

ve eğer $1 + G(s)H(s)$ 'in bütün kökleri s -düzleminin sol yarısında yer alıyorsa karardır. Dolayısıyla, denklem [13]'ün bütün sıfırları, s -düzleminin sol yarısında yer almalıdır.

$1 + G(s)H(s)$ sıfırları s -düzleminin sağ yarısında yer almıyorsa sistem karardır.

$1 + G(s)H(s)$ 'in kutup ve sıfırlarının gösterildiği, Şekil 6.16(a)'da gösterilen, s -düzlemini düşünün. Şekil 6.16(a)'deki gibi bir T noktası alırsak ve saat yönünde, kutup ve sıfırları içine almayacak şekilde, kapalı bir kontür boyunca hareket ettirsek, her bir kutup ve sıfırdan, T yol çevresinde dönerken, T noktasına çizilen vektörlerin her biri fazı değiştirecek fakat hiçbir 2π boyunca dönmeyecektir. Buna rağmen, eğer kapalı kontür bazı kutup ve sıfırları kuşatırsa (Şekil 6.16(b)), kuşatılan her bir kutup ve sıfırdan, T yol çevresinde dönerken, T ye çizilen vektörler, 2π boyunca dönecektir.

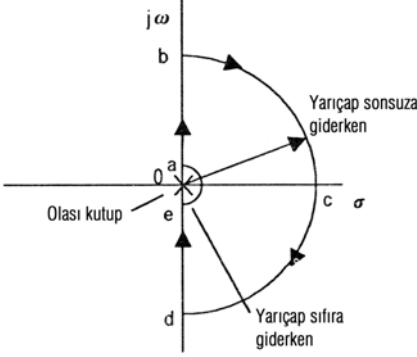


Şekil 6.16 s -düzlemi ve dönüş

Transfer fonksiyonunun payında sıfırlar, paydasında kutuplar olmasından dolayı, bir sıfırın faz rotasyonuna etkisi pozitif, bir kutbunki ise negatiftir. Genel olarak, eğer bir kontür Z adet sıfır ve P adet kutup içeriyorsa, $(Z-P)$ tane saat yönünde tam rotasyon olduğunu söyleyebiliriz.

s -koordinat sisteminde, $1 + G(s)H(s)$ 'in, s -düzleminin sağ tarafında kalan bütün sıfırlarını içeren kapalı bir kontür çizilebilir. Bu, s -düzleminde, merkezi orijin olan ve yarıçapı sonsuza uzanan bir yarım daire çizilerek gerçekleştirilebilir. Orijinde ya da sanal eksen üzerinde yer alan bir sıfır veya kutbu bu yarım dairenin içine dahil etmemek için, bu sıfır ve kutupların etrafına yarıçapları sıfıra

giden küçük yarım daireler çizerek, onları büyük alanın dışına atmış oluruz. Şekil 6.17, s -düzleminde oluşan alanı göstermektedir.



Şekil 6.17 $1+G(s)H(s)$ 'in, s -düzleminin sağ tarafındaki bütün sıfırlarını içeren kapalı kontüru.

Bu kontörü, her birine özel s değeri atanmış noktaların bileşimi olarak düşünebiliriz. ab yolunu takiben, b'den c'ye, c'den de d'ye devam eden yol (yarım dairenin etrafı), de yolu ve sonra a'nın etrafındaki küçük yarım daire. Böylece yol şu şekilde açıklanabilir:

- ab: $s = jw$, w sıfırdan artı sonsuza giderken
- bcd: $s = R$ sonsuza giderken ve θ $p/2$ ile $-p/2$ arasında, $Re^{j\theta}$ 'nin limiti
- de: $s = jw$, w eksi sonsuzdan sıfıra giderken
- ea: $s = r$ sıfıra giderken, ve θ $p/2$ ile $-p/2$ arasında, $re^{j\theta}$ 'nin limiti

Kontür, her birinin kendine özel s değeri olan bir seri nokta olarak düşünülebileceğinden; bu değerleri herhangi bir s fonksiyonuna atayabiliriz. Bu bölümün devamında, bir sonraki şekilli örnek bunu gösteriyor.

O zaman sorumuz, $1+G(s)H(s)$ çizimi için, s -düzleminde, bu kapalı bölgenin içine dahil edilmiş bir sıfırın bulunup bulunmadığıdır. Yukarıda elde ettiğimiz dahil edilme prensibini kullanarak, dahil edilen kutup ve sıfır sayısını bulabiliriz. *Nyquist Kararlılık Kriteri*, Z = sıfır sayısı, P = kutup sayısı, N =saat yönünde, kontür boyunca hareket eden bir nokta tarafından oluşturulan

vektörlerin tam rotasyon sayısı olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Z = P - N \quad [14]$$

Eğer, kontür tarafından verilen veriyi kullanarak polar koordinat sisteminde bir çizim gerçekleştirecek, N , vektör orijin etrafında dönerken saat yönünde oluşan net tam rotasyon sayısıdır. Fakat, $1+G(s)H(s)$ fonksiyonunun orijini $(0, j0)$ 'dan $(-1, j0)$ 'a taşımak daha sık kullanılan bir yöntemdir ve bu şekilde $G(s)H(s)$ çizimini ele alalım. Böylece, N , $(-1+j0)$ noktası etrafında, $G(s)H(s)$ yer eğrisi tarafından oluşturulan saat yönündeki tam rotasyon sayısı olarak belirlenir. Böylece:

Kapalı-döngü bir sistemin kararlı olabilmesi için, açık döngü frekans tepkisi $G(j\omega)H(j\omega)$, ω eksi sonsuzdan artı sonsuza giderken, $G(s)H(s)$ 'in pozitif reel kısma sahip kutup sayısından az olmamak koşulu ile, $(-1, j0)$ noktası etrafında oluşturulmuş saat yönlü bir takım rotasyonlar tanımlanmalıdır.

s -düzleminin sağ tarafında kutup içermeyen durumlar için yukarıdaki genelleme aşağıdaki şekilde sadeleştirilebilir:

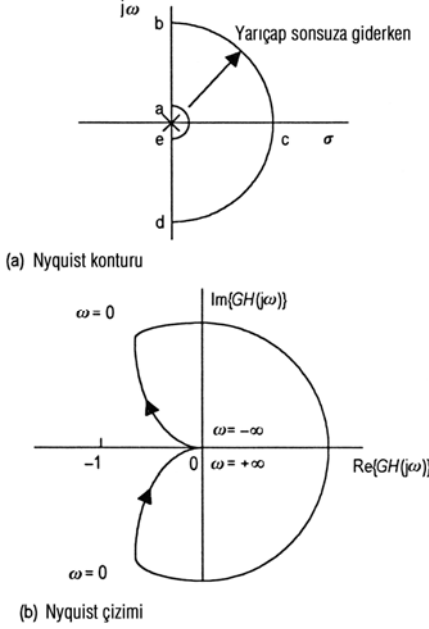
Kapalı-döngü bir sistemin kararlı olabilmesi için, açık döngü frekans tepkisi $G(jz)H(jz)$ çizimi, z eksi sonsuzdan artı sonsuza giderken, $(-1, j0)$ noktasını içermemelidir.

Yukarıda anlatılanlara örnek olarak, açık-döngü transfer fonksiyonu $K/s(\tau s+1)$ olan bir sistem düşünün. Açık-döngü sistemi orijinde bir kutba sahip. Nyquist kontürü, Şekil 6.18(a)'daki gibi, orijindeki kutup etrafında yarım dairesel bir çizgi şeklinde. Şimdi, açık-döngü transfer fonksiyonu için çizilmiş Nyquist çizimine çaprazlanmış halini ele alalım.

1 *ab yolu boyunca, $0 < \omega < +\infty$ olmak üzere $s = j\omega$ 'dir, bu sebeple:*

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega\tau + 1} = K \frac{1 - j\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1} \quad [15]$$

Dolayısıyla büyüklük aşağıdaki gibidir:



Şekil 6.18 Nyquist kontürü ve çizimi

$$büyüklük = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}} \quad [16]$$

ve faz $-\tan^{-1} \omega \tau$ 'dir. Dolayısıyla, bu elemanı Nyquist çizimi üzerinde düşündük, frekans 0 olduğu zaman büyüklük K ve faz -90° 'dir. Frekans sonsuz olduğu zaman, büyüklük 0'dır ve faz 0° 'dir.

- 2 *ed yolu boyunca*, $0 < \omega < \infty$ için $s = j\omega$ 'dir. Bu nedenle, Nyquist çizimi üzerinde sonuç, yukarıda verilenin ayna görüntüsüdür.
- 3 *bcd yolu boyunca*, $+90^\circ \geq \theta \geq -90^\circ$ için:

$$S = \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Re}^{j\theta} \quad [17]$$

Dolayısıyla, bcd elemanını, Nyquist çizimi üzerinde düşündüğümüz zaman, aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{K}{Re^{j\theta} (\tau Re^{j\theta} + 1)} \right] = 0e^{-2j\theta} \quad [18]$$

ve dolayısıyla, $G(s)H(s)$ yer eğrisi, sıfır yarıçapa sahiptir ve -180° 'den $+180^\circ$ 'ye döner.

- 4 *efa yolu boyunca*, s değerleri, yarım dairenin yarıçapı r ile, $+90^\circ \geq \theta \geq -90^\circ$ olmak üzere, aşağıdaki gibi bağlantılıdır:

$$s = \lim_{r \rightarrow 0} re^{j\theta} \quad [19]$$

dolayısıyla, efa elemanını Nyquist çizimi üzerinde düşündüğümüz zaman, aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{K}{re^{j\theta} (\tau re^{j\theta} + 1)} \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{K}{e^{j\theta}} \right] = \infty e^{-j\theta} \quad [20]$$

ve dolayısıyla, $G(s)H(s)$ yer eğrisi, sonsuz yarıçapa sahiptir ve -90° 'den $+90^\circ$ 'ye döner.

Böylece, yukarıdakileri kullanarak, s -düzlemindeki bir kontürü, bir Nyquist çizimine dönüştürebiliriz.

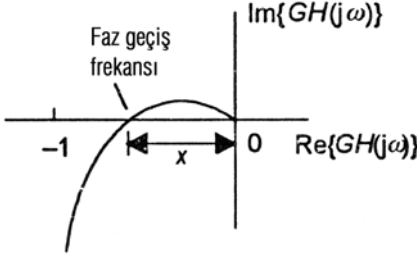
Sonuçta elde edilen Nyquist çizimi için, $(-1, j0)$ noktasını kuşatan bir kuşatma dairesi yoktur ve sistem kararlıdır. Dolayısıyla, Nyquist çizimini çizerek ve $(-1, j0)$ noktasının kuşatılıp kuşatılmadığını düşünerek, bir sistemin, s -düzleminin sol el tarafında bir kutbu olup olmadığını ve kararlı olup olmadığını belirleyebiliriz.

Görelî kararlılık

Kazanç marjini ve faz marjininin kullanımı, bu ünite, frekans bölgesinde bir Bode çizimi ile tanımlandığı zaman, bir sistemin göre(ce)li kararlılığını belirlemek için anlatıldı. Göreceli kararlılığı belirlemenin bir başka yolu, kazanç marjini ve faz marjini kullanımıyla Nyquist çizimini kullanmaktır. O zaman:

1 *Kazanç marjini*

Kazanç marjini, $G(j\omega)H(j\omega)$ 'nin Nyquist çizimi tarafından oluşturulan negatif reel eksen kuşağı ile $(-1, j0)$ noktasının birbirlerine uzaklığını ifade etmek için kullanılır. Kazanç marjini, gerçek değer, kararsız hale gelmesi için gereken çarpan miktarıdır ve dB ile ifade edilir. Böylece, eğer çizim negatif eksen $-x$ 'te keserse (Figür 7.19), -1 değerini vermesi için $1/x$ ile çarpılmalıdır ve bu nedenle kazanç marjini dB cinsinden $20 \lg (1/x)$ 'dir.



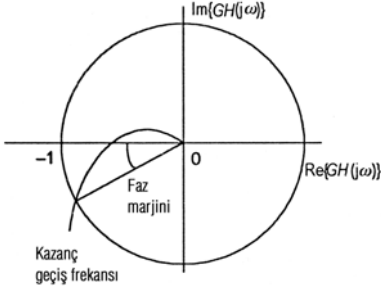
Şekil 6.19 Kazanç marjini

$G(j\omega)H(j\omega)$ çizimi, $(-1, j0)$ noktasından geçtiği zaman, kazanç marjini 0 dB'dir, sistem kararsızlık marjini üzerindedir. $G(j\omega)H(j\omega)$ çizimi, $(-1, j0)$ noktasının soluna giderse, kazanç marjini dB cinsinden negatiftir, sistem kararsız durumdadır. $G(j\omega)H(j\omega)$ çizimi, $(-1, j0)$ noktasının sağına giderse, kazanç marjini dB cinsinden pozitifdir, sistem kararlı durumdadır. $G(j\omega)H(j\omega)$ çizimi negatif reel eksenle kesişmiyorsa, kazanç marjini dB cinsinden sonsuzdur.

Faz geçiş frekansı, çizimin negatif reel eksenle kesiştiği frekanstır.

2 Faz marjini

Faz marjini, *kazanç-geçiş frekans noktasının*, yani çizim üzerinde büyüklüğün 1 olduğu noktanın, yer eğrisi üzerinde $(-1, j0)$ noktasından geçmesi için, $G(j\omega)H(j\omega)$ çiziminin orijin etrafında kaç derece döndürülmesi gerektiğini derece cinsinden veren açı olarak tanımlanır (Şekil 6.20).



Şekil 6.20 Faz marjini

Bir örnek olarak, açık-döngü transfer fonksiyonu $K/(s+1)(s+2)(s+3)$ olan bir sistem düşünün; bu sistem bu üniteye (Nyquist çizimi için olan Şekil 6.15'e bakınız) daha önce ele alınmıştı. Açık-döngü frekans tepkisi aşağıdaki gibidir (denklem [8]):

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)} \quad [21]$$

ve bu denklem de aşağıdaki ifadeyi verecek şekilde (denklem [11]) yeniden düzenlenebilir:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{6K(1-\omega^2)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)} + j \frac{\omega K(\omega^2-11)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)} \quad [22]$$

$\omega = \sqrt{11}$ olduğu zaman, sanal kısım 0'dır ve bu nedenle, reel kısım $-K/60$ 'tır ve bu nokta çizimin reel eksenini kestiği noktadır. Böylece eğer $K = 20$ ise, çizim negatif reel eksenini $-20/60 = -1/3$ 'te keser. Kazanç böylece, -1 noktasına ulaşmak için, 3 kadar arttırılmış olur. Kazanç marjini dolayısıyla $20 \lg 3 = 9.5$ dB olur.

Büyüklik aşağıdaki gibidir (denklem [9]):

$$b\ddot{u}y\ddot{u}kl\ddot{u}k = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)}} \quad [23]$$

Böylece, $\omega = 1.84 \text{ rad/s}$ olduğu zaman, $K = 20$ için, büyüklük 1'dir. Bu frekansta, faz -135.5° 'dir. dolayısıyla faz marjini, 44.5° 'dir.

Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılığı

Açık-döngü transfer fonksiyonu $G(s)H(s)$ olan bir sistemi ele alırsak ve zaman kaydırma teoremini kullanarak (3.Bölümde) bir T zaman gecikmesi eklersek, açık-döngü transfer fonksiyonu aşağıda belirtilen forma dönüşür:

$$G(s)H(s)e^{-sT} \quad [24]$$

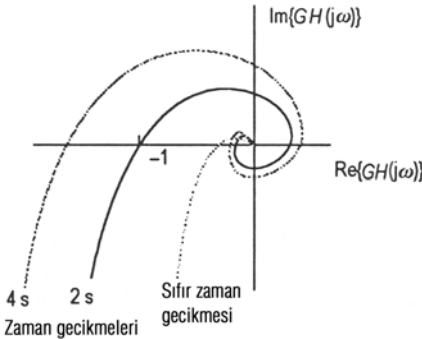
Açık-döngü transfer fonksiyonu için bir Nyquist çizimi, çizersek, zaman gecikmesinin etkisi, her bir ω 'deki fazörü saat yönünde ωT açısı kadar döndürmesidir. Büyüklüğü etkilemez.

Kontrol sistemlerinde, ω sonsuza giderken, büyüklük genellikle sifıra yakınsar. Böylece, zaman gecikmesinin etkisi, ω sonsuza giderken, çizimin, orijine doğru saat yönünde spiral çizmesini sağlamaktır. Bunun bir sonucu olarak, çizimin reel eksenle sonsuz sayıda kesişimi vardır.

Şekil 6.21 yukarıda anlatılan durumu, farklı zaman gecikmeleri için, aşağıda belirtilen formda bir açık-döngü transfer fonksiyonuna sahip bir sistem için örnekliyor:

$$\frac{e^{-Ts}}{s(s+1)(s+2)} \quad [25]$$

2 s'lik bir zaman gecikmesi ile, sistem marjinal kararlıdır, daha uzun zamanlar için sistem kararsızdır ve daha kısa zamanlar için, sistem kararlıdır.



Şekil 6.21 Zaman gecikmeli bir sistem için Nyquist çizimi

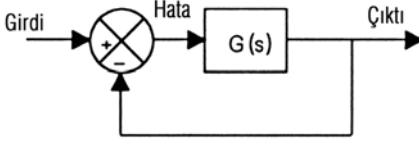
Sabit M-yer eğrileri

Birim geri beslemeli kapalı-döngü bir sistem düşünün (Şekil 6.22) ve bu sistemin transfer fonksiyonu aşağıda belirtildiği gibidir:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad [26]$$

Sinüzoidal bir girdi için $G(s) = G(j\omega)$ 'dir ve $G(j\omega)$ 'nin reel ve sanal bir kısmı olduğunu düşünebiliriz:

$$G(j\omega) = x(\omega) + jy(\omega) \quad [27]$$


Şekil 6.22 Birim geri beslemeli kapalı-döngü sistem

Kapalı-döngü sistemin büyüklüğü, M , dolayısıyla aşağıdaki gibidir:

$$M = \left| \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \right| = \left| \frac{x + jy}{1 + x + jy} \right| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}} \quad [28]$$

Denklem [28] aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned} M^2(1 + 2x + x^2 + y^2) &= x^2 + y^2 \\ (1 - M^2)x^2 - 2M^2x + (1 - M^2)y^2 &= M^2 \\ x^2 - \frac{2M^2}{1 - M^2}x + y^2 &= \frac{M^2}{1 - M^2} \end{aligned}$$

Kareye tamamlamak için, denklemin her iki tarafına $[M^2/(1-M^2)]^2$ eklersek, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$x^2 - \frac{2M^2}{1 - M^2}x + \left[\frac{M^2}{1 - M^2} \right]^2 + y^2 = \frac{M^2}{1 - M^2} + \left[\frac{M^2}{1 - M^2} \right]^2$$

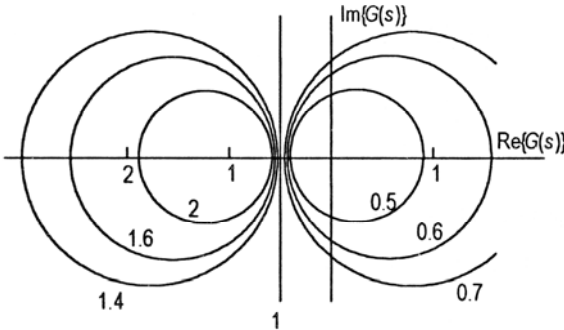
ve bunun sonucunda aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\left(x - \frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 \quad [29]$$

Bu, sabit bir M değeri için, yarıçapı $|M/(1-M^2)|$, merkezi $x = M^2/(1-M^2)$, $y = 0$ olan bir daire denklemdir. $M = 1$ için, sonsuz yarıçap uzunluğunda bir daire vardır. $M = 2$ için, $2/3$ yarıçap uzunluğunda bir daire vardır ve merkezi $(4/3, 0)$ 'dır. $M = 3$ için, $2/3$ yarıçap uzunluğunda bir daire vardır ve merkezi $(9/8, 0)$ 'dır. M 'in farklı değerleri için, x -eksenine, yani $G(s)$ 'in reel kısmı için olan eksene simetrik olan, bir daire ailesi çizilebilir. Bu daire ailesi *sabit- M daireleri* veya *sabit- M yer eğrisi* olarak adlandırılır. Şekil 6.23, daire ailesinin bazılarını gösteriyor ve Tablo 6.1, bazı M değerleri için merkez ve yarıçap verilerini gösteriyor.

Tablo 6.1 *M-daireleri*

M	Merkez	Yarıçap	M	Merkez	Yarıçap
0.5	0.33,0	0.33	1.6	-1.64,0	1.03
0.7	0.96,0	1.37	1.8	-1.46,0	0.80
1.0	∞	∞	2.0	-1.33,0	0.67
1.2	-3.27,0	2.73	3.0	-1.13,0	0.38
1.4	-2.04,0	1.46	4.0	-1.04,0	0.21

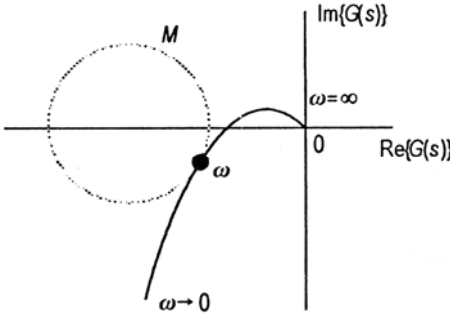


Şekil 6.23 *Sabit M daireleri*

Sabit M -daireleri $M = 1$ doğrusuna ve reel eksene simetriktir. $M = 1$ 'in solundaki daireler, M 'in birden büyük olduğu değerlere, sağındakiler 1'den küçük olduğu değerlere karşılık gelir.

Sabit M -yer eğrileri ve Nyquist çizimleri

Eğer bir sistem için, sabit- M grafiği, sistemin Nyquist çizimi ile üst üste koyulursa, çizimin sabit- M yer eğrisiyle kesişimleri, Nyquist çizimi üzerinde belirtilen noktalarla gösterilen frekanslardaki M değerlerini verir. Şekil 6.24, bu durumu örnekliyor.



Şekil 6.24 Nyquist çizimi ve sabit M -yer eğrisi

Sabit N -yer eğrileri

Yine, birim geri beslemeli kapalı-döngü sistemini düşünün (Şekil 6.22) ve bu sistemin transfer fonksiyonu aşağıda belirtildiği gibidir:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad [30]$$

Sinüzoidal bir girdi için $G(s) = G(j\omega)$ 'dir ve $G(j\omega)$ 'nin reel ve sanal bir kısmı olduğunu düşünebiliriz:

$$G(j\omega) = x(\omega) + jy(\omega) \quad [31]$$

Sistemin fazı dolayısıyla $G(j\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$ 'nin fazı eksi $[1 + G(j\omega)] = [1 + x(\omega) + jy(\omega)]$ 'nin fazıdır ve dolayısıyla aşağıdaki gibidir:

$$faz = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{1+x}\right) \quad [32]$$

Böylece:

$$\tan \phi = \frac{y}{x^2 + x + y} \quad [33]$$

Eğer $N = \tan \phi$ olursa, denklem [33] aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$x^2 + x + y^2 - \frac{y}{N} = 0$$

Denklemin her iki tarafına $(1/4 + 1/4N^2)$ eklersek, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - \frac{y}{N} + \frac{1}{4N^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2} \quad [34]$$

N 'nin sabit bir değeri için, denklem, merkezi $(-1/2, 1/2N)$ ve yarıçapı aşağıda belirtildiği gibi olan bir dairedir:

$$\text{yarıçap} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2}} = \sqrt{\frac{N^2 + 1}{4N^2}} \quad [35]$$

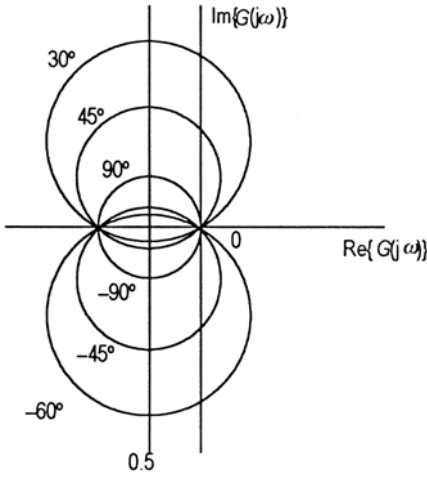
N 'nin farklı değerleri için bir daire ailesi oluşturulabilir, bu tip daireler, *sabit- N daireleri* veya *sabit- N yer eğrisi* olarak tanımlanır. örnek olarak, $\phi = 30^\circ$ için, $N = \tan \phi = 0.577$ 'dir ve bu $(-0.5, 0.866)$ merkezli daire, $\sqrt{[(0.333+1)/(4 \times 0.333)]} = 1.000$ yarıçapına sahiptir. $\phi = 0^\circ$ için, $N = \tan \phi = 0$ 'dır ve bu $(-0.5, \infty)$ merkezli daire sonsuz bir yarıçapa sahiptir.

Tablo 6.2, farklı N değerleri için, bazı daire yarıçap ve merkez değerlerini gösteriyor ve dolayısıyla faz ϕ 'ı gösteriyor ve Şekil 6.25 daire ailesinin bazılarını gösteriyor.

Tablo 7.2 Sabit N -daireleri

ϕ	N	Merkez	Yarıçap
-90°	$-\infty$	$-0.5,$	$0 \quad 0.500$
-60°	-1.732	$-0.5,$	$-0.289 \quad 0.577$
-45°	-1.000	$-0.5,$	$-0.500 \quad 0.707$

-30°	-0.577	-0.5,	-0.866	1.000
-15°	-0.268	-0.5,	-1.866	1.931
0°	0	-0.5,	∞	∞
+15°	+0.268	-0.5,	+1.866	1.931
+30°	+0.577	-0.5,	+0.866	1.000
+45°	+1.000	-0.5,	+0.500	0.707
+60°	+1.730	-0.5,	+0.289	0.577
+90°	+∞	-0.5,	0	0.500



Şekil 6.25 Sabit N daireleri

Nichols grafikleri

Nichols grafiği, büyüklüğün faza karşı desibel cinsinden çizimidir. Yine, birim geri beslemeli kapalı-döngü sistemini düşünün (Figür 7.22) ve bu sistemin transfer fonksiyonu aşağıda belirtildiği gibidir:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad [36]$$

Sinüzoidal bir girdi için $G(s) = G(j\omega)$ 'dir ve ϕ ω 'ye bağımlı bir açık-döngü fazı fonksiyonu olmak üzere, $G(j\omega)$ 'nin reel ve sanal bir kısmı olduğunu düşünebiliriz:

$$G(j\omega) = G(\omega)(\cos\phi + j\sin\phi) \quad [37]$$

Büyüklik M dolayısıyla aşağıdaki gibidir:

$$M = \frac{G}{\sqrt{(1+G \cos \phi)^2 + G^2 \sin^2 \phi}}$$

$$= \frac{G}{\sqrt{1+2G \cos \phi + G^2}} \quad [38]$$

Bunun sonucunda:

$$\cos \phi = -\frac{M^2 + G^2(M^2 - 1)}{2M^2G} \quad [39]$$

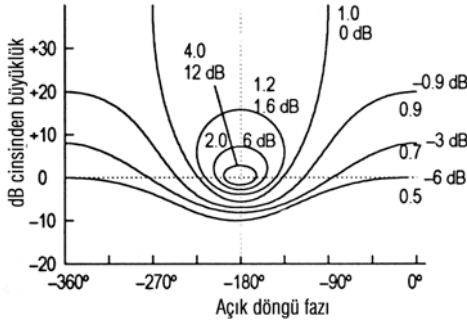
Şekil 6.26, M -kontürlerinin faza bağlı fonksiyonlar şeklinde çizildiği bu tip bir grafik gösteriyor.

Benzer biçimde, N -kontürlerinin faza bağlı fonksiyonlar şeklinde çizildiği bir grafik gösterebiliriz. Denklem [36]'da verilen sistem için, kapalı-döngü fazı aşağıda verildiği gibidir:

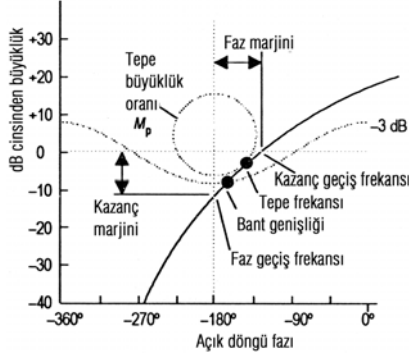
$$\text{faz} = G(j\omega)' \text{nin fazı} - [1+G(j\omega)]' \text{nin fazı}$$

$$= \phi - \tan^{-1} \left(\frac{G \sin \phi}{1+G \sin \phi} \right) \quad [40]$$

Şekil 6.27, M - ve N -kontürleriyle birlikte çizilen bir grafik gösteriyor.

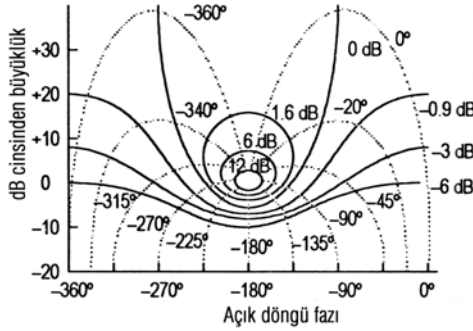


Şekil 6.26 Sabit M -yer eğrisiyle Nichols grafiği



Şekil 6.27 *M- ve N-kontürleriyle Nichols grafiği*

Nichol grafikleri, *M-* ve *N-kontür*leriyle birlikte, özel hazırlanmış grafik kağıtlarında bulunur veya MATLAB gibi uygun bir yazılım kullanılarak oluşturur. Açık-döngü büyüklük ve faz yer eğrisini çizerek, sistemin kapalı-döngü frekans tepkisi karakteristikleri kontürlerden belirlenebilir. Şekil 6.28, bu kavramı örneklendiriyor.



Şekil 6.28 *Nichols grafiğiyle performans kriterinin belirlenmesi*

7. Kök yer eğrisi TEKNİĞİ

Kök yer eğrileri

Bir sistemin transfer fonksiyonunun kutupları, paydanın kökleridir ve o sistemin bir girdiye karşı geçici tepkisini belirler. Eğer transfer fonksiyonundaki bir parametre değiştiriliyorsa, bu kutupların konumlarına etki edebilir ve dolayısıyla sistemin tepkisine etki eder. Kutupların s -düzleminde hareket ettirilmesi, yani köklerin, her bir kök için yer eğrisi çizilerek gösterilebilir, yani parametre değişikçe konumunun nasıl değiştiğini gösteren bir çizim.

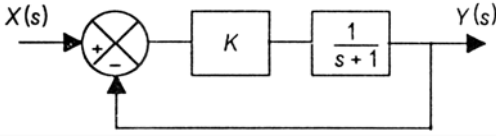
Basit bir örnek olarak, Şekil 7.1'de gösterilen birim geri beslemeli sistemi düşünün. Kapalı-döngü sistem, aşağıdaki gibi bir transfer fonksiyonuna sahiptir:

$$T(s) = \frac{K/(s+1)}{1 + K/(s+1)} = \frac{K}{s + (1 + K)} \quad [1]$$

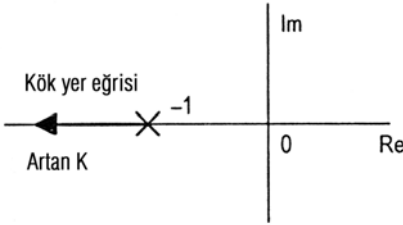
ve bu nedenle $s = -(1 + K)$ 'da tek bir kutba sahiptir. $K = 0$ olduğu zaman kutup $s = -1$ 'dedir ve K artarsa, s bu nedenle daha fazla negatif olur. $K = \infty$ olduğu zaman $s = \infty$ olur. Kapalı-döngü kutbunun konumunun s 'e bağlı nasıl değiştiğini gösteren çizgi kök yer eğrisidir ve Şekil 7.2'de gösterilmektedir. Eğer bu döngüyü açarsak, geri besleme olmayacaktır, açık-döngü transfer fonksiyonu da aşağıdaki gibi olacaktır:

$$T_o(s) = \frac{K}{s+1} \quad [2]$$

ve açık-döngü sistem $s = -1$ 'de bir kutba sahiptir. Dolayısıyla, bu örnekte, $s = -1$ 'deki kutup *açık-döngü kutbu* olarak tanımlanır. Açık-döngü kutbu kök yer eğrisinin başladığı yerde bulunan kutuptur.



Şekil 7.1 Birim geri beslemeli sistem



Şekil 7.2 Kök yer eğrisi

Daha ileri bir örnek için, Şekil 7.3'teki birim geri beslemeli döngü sistemini düşünün. Bu sistemin açık-döngü transfer fonksiyonu aşağıda belirtildiği gibidir:

$$T_o(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad [3]$$

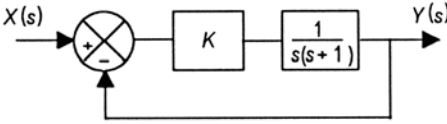
ve dolayısıyla açık-döngü kutupları $s = 0$ ve $s = -1$ 'dir. Bu sistemin, kapalı-döngü transfer fonksiyonu da aşağıdaki gibidir:

$$T(s) = \frac{K/s(s+1)}{1 + K/s(s+1)} = \frac{K}{s^2 + s + K} \quad [4]$$

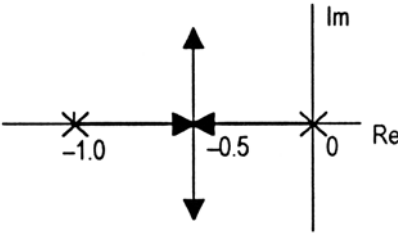
Kökler, dolayısıyla, aşağıda verildiği gibidir:

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4K}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - K} \quad [5]$$

$K = 0$ olduğu zaman, kökler $s = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} = 0$ veya -1 'dir. $K = \frac{1}{4}$ olduğu zaman, kökler reeldir ve her ikisi de $s = -\frac{1}{2}$ 'dedir. $K = \frac{1}{4}$ 'den büyük olduğu zaman, kökler reel kısımları $-\frac{1}{2}$ ve sanal kısımları $\sqrt{(K-\frac{1}{4})}$ olan kompleks eşleniklerdir. K , $\frac{1}{4}$ 'ün üzerinde arttıkça, sanal kısımlar artar. Kök yer eğrisi, $s = 0$ 'da ve $s = -1$ 'deki iki açık-döngü kutbunda başlayan iki dala sahiptir. K 0'dan $\frac{1}{4}$ 'e doğru arttıkça, kökler zıt yönlerden, $(\frac{1}{2}, 0)$ noktasına doğru hareket eder. İki kök eğrisi, $K = \frac{1}{4}$ için, $s = -\frac{1}{2}$ 'de karşılaşır. Eğer K daha da arttırılırsa, kökler reel eksenden ayrılır ve kompleks eşlenik haline gelirler ve reel kısımları $-\frac{1}{2}$ 'de sabit kaldığından, kökler $-\frac{1}{2}$ boyunca dikey çizgide hareket ederler. Figür 7.4, bu durumun kök yer eğrisini gösteriyor.



Şekil 7.3 Birim geri beslemeli sistem



Şekil 7.4 Kök yer eğrisi

Kök yer eğrilerinin temel özellikleri

Birim geri besleme olmayan, ileri döngü transfer fonksiyonu $KG(s)$ olan ve geri besleme yolu transfer fonksiyonu $H(s)$ olan kapalı-döngü bir kontrol sistemini düşünün. Sistemin transfer fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \quad [6]$$

Kökler, dolayısıyla, aşağıdaki denklem kullanılarak bulunur:

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad [7]$$

Açık-döngü transfer fonksiyonu, bir kazanç parametresi K içerir. Bunun sonucunda:

$$KG(s)H(s) = -1 \quad [8]$$

s kompleks bir değişken olduğundan, s 'in özel bir değeri için, $G(s)H(s) = x + jy$ formunda bir kompleks sayı olacaktır. Denklem [8]'i sağlamak için, reel elemanlar için bir eşitlik ve sanal elemanlar için bir eşitlik olması gerekmektedir. Dolayısıyla, reel elemanlar için $x = 1/K$ 'dır ve sanal eleman $y = 0$ 'dır. Böylece, k bir tam sayı olmak üzere, $k = 0, 1, 2, \dots$, büyüklük $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ 'dir ve faz $\tan^{-1}(y/x)$ 'tir:

$$|G(s)H(s)| = \frac{1}{K} \quad [9]$$

$$\angle G(s)H(s) = \pm(2k+1)\pi \quad [10]$$

Böylece, açılar $K > 0$ için, π 'nin veya 180° 'nin tek katları olmalıdır. $G(s)H(s)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$G(s)H(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad [11]$$

Sıfırlar, $z_1, z_2, \dots, z_m$ ve kutuplar $p_1, p_2, \dots, p_n$ reel veya sanaldır. Böylece $G(s)H(s)$ 'nin açısı aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} & [\angle(s + z_1) + \angle(s + z_2) + \dots + \angle(s + z_m)] \\ & - [\angle(s + p_1) + \angle(s + p_2) + \dots + \angle(s + p_n)] \\ & = \pm(2k+1)\pi \end{aligned} \quad [12]$$

ve bu nedenle:

Bir yer eğrisi üzerinde, bazı s değerleri için, $G(s)H(s)$ 'nin sıfırlarından çizilen vektörlerin açılarının toplamı ile kutuplarından çizilen vektörlerin açılarının toplamı arasındaki fark, 180° 'nin tek katı olmalıdır.

Denklem [9] ve denklem [11] büyüklük için aşağıdaki ifadeyi verir:

$$|G(s)H(s)| = \frac{|(s+z_1)| |(s+z_2)| \dots |(s+z_m)|}{|(s+p_1)| |(s+p_2)| \dots |(s+p_n)|} = \frac{1}{K} \quad [13]$$

ve dolayısıyla:

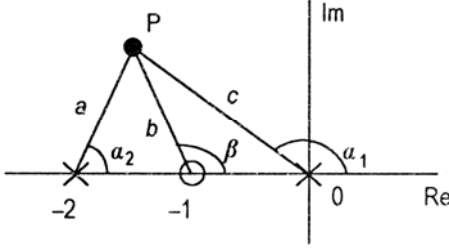
Bir yer eğrisi üzerinde, bazı s değerleri için, sıfırlardan çizilen vektörlerin büyüklüklerinin çarpımının, kutuplardan çizilen vektörlerin büyüklüklerinin çarpımına oranı $1/K$ olmalıdır.

Örnek olarak, açık-döngü transfer fonksiyonu $K(s+1)/s(s+2)$ olan bir sistem düşünün. Sistemin $s = -1$ 'de bir açık-döngü sıfırı ve $s = 0$ ve $s = -2$ 'de açık-döngü kutupları vardır. Şekil 7.5, bunların, s -düzleminde çizilmiş konumunu gösteriyor. Şimdi bir P noktasını ve bunun kök yer eğrisi üzerinde yer alması koşulunu düşünün. Vektörler, sıfırdan ve kutuplardan P 'ye çizilir. P 'nin kök yer eğrisi üzerinde olması için, denklem [12] uygulanmalıdır ve bu nedenle aşağıdaki ifade sağlanmalıdır:

$$\beta - (a_1 + a_2) = \pm \pi' \text{ nin tek katları} \quad [14]$$

Aynı zamanda, denklem [13] sağlanmalı ve bu nedenle aşağıdaki ifadeyi elde etmeliyiz:

$$\frac{b}{ac} = \frac{1}{K} \quad [15]$$



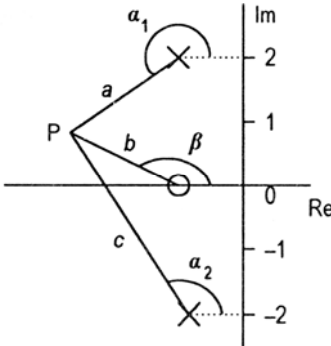
Şekil 7.5 $K(s+1)/s(s+2)$ için kutup ve sıfırlar

Daha ileri bir örnek için, açık-döngü transfer fonksiyonu $K(s+1)/(s^2+2s+5)$ olan bir sistem düşünün. Sistemin $s = -1$ 'de bir açık-döngü sıfırı ve $s = -1 \pm j2$ 'de açık-döngü eşlenik kutup çifti vardır. Şekil 7.6, bunların, s -düzleminde çizilmiş halini gösteriyor. P noktasının kök yer eğrisi üzerinde yer alması için, denklem [12] sağlanmalıdır:

$$\beta - (a_1 + a_2) = \pm \pi' \text{ nin tek katları} \quad [16]$$

ve aynı zamanda denklem [13] sağlanmalıdır:

$$\frac{b}{ac} = \frac{1}{K} \quad [17]$$



Şekil 7.6 $K(s+1)/(s^2+2s+2)$ için kutup ve sıfırlar

Kök yer eğrilerini oluşturmak için kurallar

Bir kök yer eğrisini oluşturmanın temel koşulları, denklem [12] ve [13] uygulamasıdır. Dolayısıyla, bir kök yer eğrisi üzerindeki noktaların, konum belirlemek için, hangisinin açılı denklemini sağladığını ve hangisinin büyüklük denklemini sağladığını deneme-yanılma yoluyla belirleyebiliriz. Bu tip bir deneme-yanılma prosedürünün sıkıcılığını azaltmak için, daha hızlı bir yakınsama elde edebilmeyi olanaklı kılan kurallar geliştirilmiştir.

1 $K = 0$ noktaları

Denklem [9], $G(s)H(s) = 1/K$ ifadesini verir ve dolayısıyla $K = 0$ noktaları, açık-döngü transfer fonksiyonunun kutuplarıdır. Kök yer eğrisi, bu tip noktalardan başlar. n tane kutup varsa, bu tip n tane nokta vardır.

2 $K = \infty$ noktaları

Denklem [9], $G(s)H(s) = 1/K$ ifadesini verir ve dolayısıyla $K = \infty$ noktaları, açık-döngü transfer fonksiyonunun sıfırlarıdır. Kök yer eğrisi, bu tip noktalarda sona erer. Eğer kutup sayısı, sıfır sayısından daha fazla ise, ve bunun sonucu çoğunluğu kök yer eğrisinin başlangıç noktası ise, m tane kutup m tane sıfırda sona erer ve kalan $(n-m)$ tane kutup da, sonsuzda sona eren yer eğrileri verir.

3 Tamamlanmış kök yer eğrisindeki dalların sayısı

Kök yer eğrisinin dallarının sayısı, açık-döngü transfer fonksiyonunun karakteristik denkleminin derecesine, n 'e eşittir. Her bir kök, K o'dan ∞ 'a değişirken bir kök yer eğrisi izler. Örnek olarak, açık-döngü transfer fonksiyonu $s^3 + 2s^2 + 2s + K$ olan bir sistem için, 3 kök olacaktır ve bu nedenle 3 dal olacaktır.

4 Simetri

Tamamlanmış kök yer eğrisi s -düzleminin reel eksenine göre simetriktir. Bunun nedeni, köklerin reel olma zorunluluğudur ve bu nedenle eksen üzerinde veya aynı reel elemana sahip eksi veya artı aynı değerde sanal elemana sahip olan kompleks eşlenik çiftleri olmaları zorunluluğudur.

5 Kök yer eğrilerinin asimptotları

Sonsuzda biten yer eğrileri, pozitif reel eksenle aşağıdaki gibi, $n \neq m$ ve $k = |n-m| - 1$ olmak üzere, açısız asimptotlara yönelen yer eğrileri oluşturur:

$$\frac{\pi}{n-m}, \frac{3\pi}{n-m}, \frac{5\pi}{n-m}, \dots, \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad [18]$$

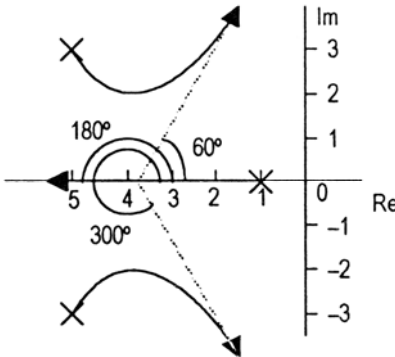
6 Asimptotların kesişimi

Asimptotlar, reel eksen üzerinde bir noktada kesişirler ve bazen *çekim merkezi* veya *kütle merkezi* olarak adlandırılırlar ve bu kavram, aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n-m} \quad [19]$$

Kutup ve sıfırlar, ya reel ya da kompleks eşlenik çiftleri olduğundan, denklem [19]'un payında yer alan sanal kısımlar, her zaman birbirlerini sadeleştirecektir ve böylece, kutupların ve sıfırların toplamaları sadece kutup ve sıfırların reel kısımların toplamaları olarak düşünülür.

Madde 6 ve 7'ye bir örnek olarak, açık-döngü transfer fonksiyonu $K/(s+1)(s^2+10s+16)$ olan bir sistemi düşünün. Bu sistemin sıfırı yoktur ve $s = -1$ 'de ve $-5 \pm j3$ 'te kutuplara sahiptir. $n - m = 3$ 'tür. Asimptotlar, pozitif reel eksenle $\pi/3$, $3\pi/3$ ve $5\pi/3$, yani 60° , 180° ve 300° açılarını oluşturacaktır. Reel eksenle kesişimler $[(-1 - 5 - 5) - (0)]/3 = -3.7$ 'de olacaktır. Figür 8.7, kök yer eğrisinin formunu göstermektedir.



Şekil 7.7 Asimptotlar

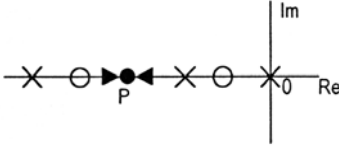
7 *Reel eksen üzerindeki kök yer eğrisi*

Eğer açık-döngü transfer fonksiyonu, bir veya daha fazla reel kutup veya sıfıra sahipse, sağında yer alan reel kutupların ve sıfırların sayısının toplamı tek olan reel eksen aralığı, bir kök yer eğrisi tarafından doldurulacaktır. Kompleks kutup ve sıfırlar kök yer eğrisinin reel eksen üzerindeki düzenini etkilemezler.

Bu, reel eksen üzerinde bir P noktasına açı koşulu uygulanarak sağlanabilir (Şekil 7.8). Noktanın sağında yer alan sıfır ve kutupların her biri 180° açı oluştururlar ve solunda kalanlar 0° açı oluştururlar. Açı koşulunun (denklem [12]) sağlanmasının yapılması ve aşağıdaki denklem için:

$$\begin{aligned} & [\langle (s + z_1) \rangle + \langle (s + z_2) \rangle + \dots + \langle (s + z_m) \rangle] \\ & - [\langle (s + p_1) \rangle + \langle (s + p_2) \rangle + \dots + \langle (s + p_n) \rangle] \\ & = \pm(2k+1)\pi \end{aligned}$$

noktanın sağında kalan reel kutup ve sıfırların toplamı tek bir sayı olmalıdır ve bu nedenle π radyan oluşturmalıdır.



Şekil 7.8 Reel eksen üzerindeki bir nokta için açı düzenlemeleri

8 *Kalkış açıları ve kök yer eğrisinin kompleks kutup ve sıfırlara varması*

Kalkış açısı veya varma, kök eğrisi, bir kutup veya sıfırdan ayrılırken veya kutup veya sıfıra varırken, kutup ve sıfırın kök eğrisine olan tanjantının açısını belirtir. Bu açı, açı koşulu kullanımı yoluyla (denklem [12]):

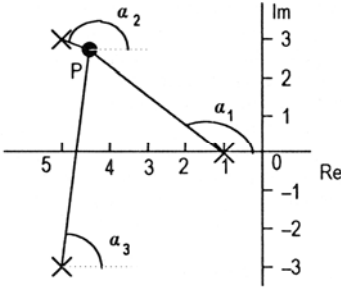
$$\begin{aligned} & [\langle (s + z_1) \rangle + \langle (s + z_2) \rangle + \dots + \langle (s + z_m) \rangle] \\ & - [\langle (s + p_1) \rangle + \langle (s + p_2) \rangle + \dots + \langle (s + p_n) \rangle] \\ & = \pm(2k+1)\pi \end{aligned}$$

ve s 'in ele alınan kutup veya sıfıra çok yakın kök yer eğrisi üzerinde bir nokta olduğu varsayılarak bulunabilir. Bir örnek olarak, açık-döngü transfer fonksiyonu $K/(s + 1)(s^2 + 10s + 16)$

olan bir sistem düşünün. Bu sistemin sıfırı yoktur ve $s = -1$ 'de ve $s = -5 \pm j3$ 'te iki kutba sahiptir. Dolayısıyla, kutuplara doğru olan üç a_1, a_2, a_3 açısı için aşağıdaki denklemi yazabiliriz (Şekil 7.9):

$$-[a_1 + a_2 + a_3] = \pm \pi' \text{nin tek katları} \quad [20]$$

$-5 + j3$ kutbuna en yakın noktayı düşünün, o halde, $a_1 = 180^\circ - \tan^{-1}(3/4) = 143^\circ$ dir ve $a_3 = 90^\circ$ dir. Dolayısıyla:



Şekil 7.9 Ayrılma açısı

$$(143^\circ + a_2 + 90^\circ) = \pm 180' \text{in tek katı} \quad [21]$$

Böylece, $a_2 = 540^\circ - 233^\circ = 307^\circ$ dir ve bu nedenle, bu açı, kök yer eğrisinin kökten kalkış açısıdır. Şekil 7.9 tamamlanmış kök yer eğrisini gösteriyor.

9 Kök yer eğrisinin sanal eksenle kesişimi

Kök yer eğrisinin sanal eksenle kesişimi, sanal karakteristik köklerinin olma koşulunu sağlayan K değerlerini hesaplama yoluyla belirlenir. Bu, Routh-Hurwitz kriteri kullanılarak yapılabilir (Bölüm 4'e bakınız). Bir örnek olarak, açık-döngü transfer fonksiyonu $K/s(s + 4)(s^2 + 4s + 20)$ olan bir sistem düşünün. Kapalı-döngü sistem, aşağıdaki transfer fonksiyonuna sahip olacaktır:

$$\frac{Ks(s + 4)(s^2 + 4s + 20)}{1 + K/s(s + 4)(s^2 + 4s + 20)} \quad [22]$$

ve dolayısıyla karakteristik denklem aşağıda belirtildiği gibidir:

$$s(s+4)(s^2+4s+20)+K=0$$

$$s^4+8s^3+36s^2+80s+K=0 \quad [23]$$

Routh tablosu dolayısıyla aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{l|lll} \text{Satır 0: } s^4 & 1 & 26 & K \\ \text{Satır 1: } s^3 & 8 & 80 & \\ \text{Satır 2: } s^2 & 26 & K & \\ \text{Satır 3: } s^1 & (2080-8K)/26 & & \\ \text{Satır 4: } s^0 & K & & \end{array}$$

Böylece, bütün köklerin s -düzleminin sol yarısında kalması için, aşağıdaki ifadelerin sağlanması gerekir:

$$K > 0; \frac{2080-8K}{26} > 0 \quad [24]$$

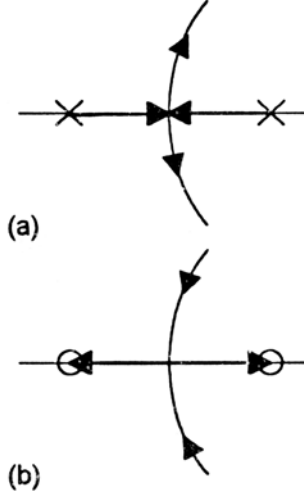
K 'nın, köklerin konumunun sanal eksen üzerinde olmasına karşılık gelen kritik değeri, dolayısıyla $8K = 2080$ içindir ve nedenle $K = 260$ içindir. Bu K değerini veren s değerini, K 'yı karakteristik denkleme koyarak bulabiliriz. Buna rağmen, daha basit bir metot, K 'yı, ikinci satır tarafından oluşturulan katsayılardan oluşturulmuş denklemde yerine koymaktır:

$$26s^2 + K = 0$$

Bunun sonucunda $s = \pm j\sqrt{10}$ 'dir.

10 *Kopma noktaları*

Kopma noktası terimi, iki veya daha fazla yer eğrisinin bir noktada karşılaşarak ve daha sonra o noktadan ayrı yollara ayrılarak devam etmesi için kullanılır (Şekil 7.10).



Şekil 7.10 Kırılma noktaları örnekleri

Şekil 7.10(a)'da, kök yer eğrisinin iki dalı reel eksen üzerindeki kopma noktasında karşılaşıyorlar ve daha sonra zıt yönlerde eksenden ayrılıyorlar. Figür 7.10(b)'de, iki kompleks eşlenik kök yer eğrisi reel eksen üzerindeki kopma noktasında karşılaşıyorlar ve zıt yönlerde ayrılıyorlar. Kopma noktaları, kök yer eğrisi üzerinde çoklu köklerin bulunduğu noktalarlardır. Örnek olarak, Figür 7.10(a), K değerine o noktaya karşılık gelen değer atanması, karakteristik denklemin çift bir köküne karşılık gelir. Çoklu kökler, $dK/ds = 0$ denklemini sağlayan s değerlerinde meydana gelirler.

Bu koşul, bütün kopma noktalarının denklemi sağlamak zorunda olması fakat bütün çözümlerin kopma noktası olmamasından dolayı, gerekli ve fakat yeterli olmayan bir koşuldur.

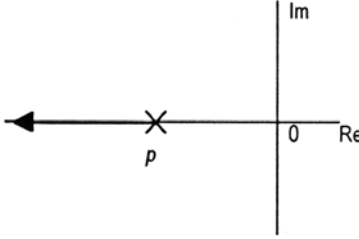
Bir örnek olarak, açık-döngü transfer fonksiyonu $K/s(s + 1)$ ve bunun sonucunda bu sistemin kapalı-döngü transfer fonksiyonu $K/(s^2 + s + K)$ olan bir sistem düşünün. Karakteristik denklem dolayısıyla, $s^2 + s + K = 0$ 'dır. Bunun sonucunda, $dK/ds = -2s - 1$ 'tir ve bu nedenle $dK/ds = 0$ olduğu zaman, $s = -1/2$ 'de bir kopma noktası vardır.

11 Dalların kopma noktasına varış veya ayrılış açısı

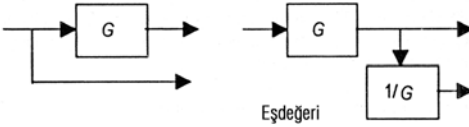
Kök yer eğrisinin bir kopma noktasına varış veya ayrılış açısı ilgili noktadaki yer eğrilerinin sayısına bağlıdır. Genelde, kopma noktasına, n tane varan veya ayrılan kök yer eğrilerinin arasında $180/n$ derece açı vardır.

Kök yer eğrileri örnekleri

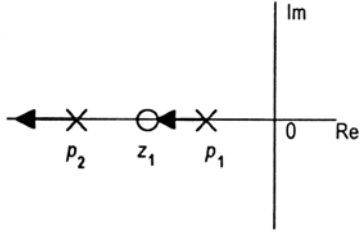
Şekil 7.11 ile Şekil 7.21 arasındaki figürler, yaygın olarak karşılaşılan açık-döngü transfer fonksiyonlarına sahip sistemler için kök yer eğrisi örneklerini gösteriyor.



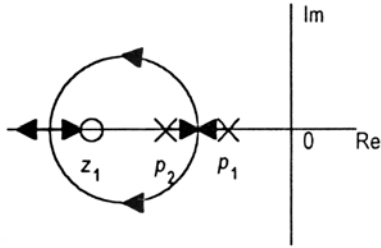
Şekil 7.11 Açık-döngü transfer fonksiyonu $K/(s+p)$ olan bir sistem için kök yer eğrisi



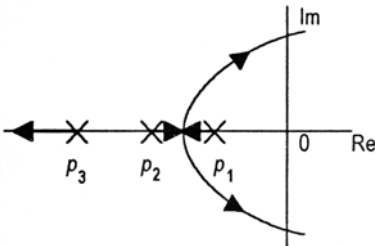
Figür 7.12 Açık-döngü transfer fonksiyonu $K/(s+p_1)(s+p_2)$ olan bir sistemin, $p_2 > p_1$ için, kök yer eğrisi



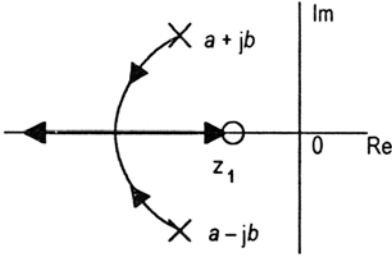
Şekil 7.13 Açık-döngü transfer fonksiyonu $K(s+z_1)/(s+p_1)(s+p_2)$ olan bir sistemin, $p_1 > z_1 > p_2$ için, kök yer eğrisi



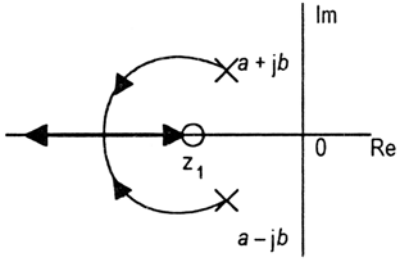
Şekil 7.14 Açık-döngü transfer fonksiyonu $K(s+z_1)/(s+p_1)(s+p_2)$ olan bir sistemin, $z_1 > p_2 > p_1$ için, kök yer eğrisi



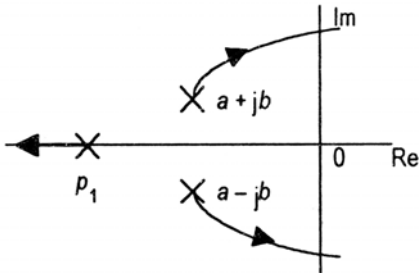
Şekil 7.15 Açık-döngü transfer fonksiyonu $K/(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)$ olan bir sistemin, $p_3 > p_2 > p_1$ için, kök yer eğrisi



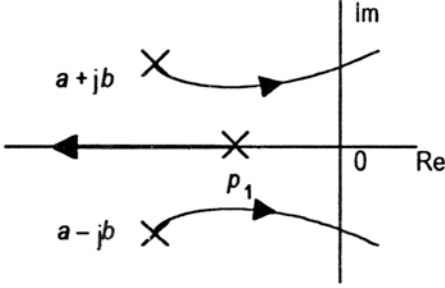
Şekil 7.16 Açık-döngü transfer fonksiyonu $K(s+z_1)/((s+a+jb)(s+a-jb))$ olan bir sistemin, $a > z_1$ için, kök yer eğrisi



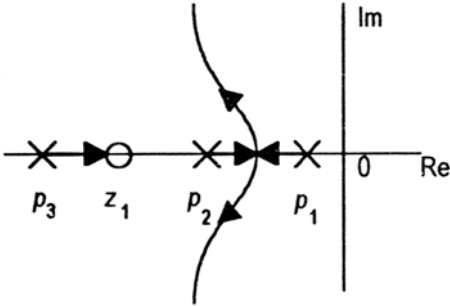
Şekil 7.17 Açık-döngü transfer fonksiyonu $K(s+z_1)/((s+a+jb)(s+a-jb))$ olan bir sistemin, $z_1 > a$ için, kök yer eğrisi



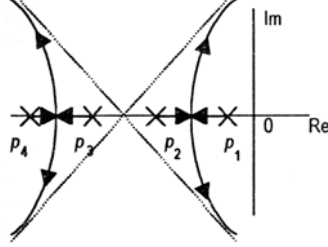
Şekil 7.18 Açık-döngü transfer fonksiyonu $K/((s+p_1)(s+a+jb)(s+a-jb))$ olan bir sistemin, $p_1 > a$ için, kök yer eğrisi



Şekil 7.19 Açık-döngü transfer fonksiyonu $K/(s+p_1)(s+a+jb)(s+a-jb)$ olan bir sistemin, $a > p_1$ için, kök -yer eğrisi



Şekil 7.20 Açık-döngü transfer fonksiyonu $K(s+z_1) / (s+p_1)(s+a+jb)(s+a-jb)$ olan bir sistemin, $p_3 > z_1 > p_2 > p_1$ için, kök -yer eğrisi



Figür 8.21 Açık-döngü transfer fonksiyonu $K/(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)$ olan bir sistemin, $p_4 > p_3 > p_2 > p_1$ için, kök yer eğrisi

Zaman gecikmesi

Bir girdi sinyali değişiminde, bir T zaman gecikmesi ve bu gecikmenin çıktı üzerindeki etkileri olan, kapalı-döngü bir sistem düşünelim. s -bölgesinde, bu sistemi e^{-Ts} şeklinde ifade edebiliriz. Dolayısıyla eğer bu tip bir sistemin toplam açık-döngü transfer fonksiyonu, $KG(s)H(s)e^{-Ts}$ şeklinde yazılabiliyorsa, kapalı-döngü transfer fonksiyonu, aşağıda belirtilen formda bir karakteristik denkleme sahiptir:

$$1 + KG(s)H(s)e^{-Ts} = 0 \quad [25]$$

s reel ve sanal birer bölüm içerdiğinden dolayı, eğer $s = \sigma + j\omega$ ise, denklem [25]'i aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$1 + KG(s)H(s)e^{-\sigma T}e^{-j\omega T} = 0 \quad [26]$$

Büyüklik koşulu dolayısıyla, aşağıdaki gibi olur:

$$|G(s)H(s)| = \frac{e^{-\sigma T}}{K} \quad [27]$$

ve açı koşulu, $K = 0, -1, -2$ v.s. olmak üzere, aşağıdaki gibi olur:

$$\angle [KG(s)H(s)e^{-j\omega T}] = (2k+1)\pi \quad [28]$$

Böylece, zaman gecikmesinin etkisi, aşağıdaki açıyı verecek biçimdedir:

$$\angle [KG(s)H(s)] = (2k+1)\pi + \omega T \quad [29]$$

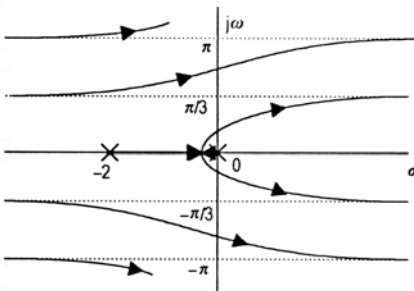
e^{-Ts} , s 'in kuvvetleri kullanılarak sonsuz bir seri olarak yazılabileceğinden, karakteristik denklem [25] kök yer eğrisi çiziminde sonsuz sayıda dal tanımlar. Örnek olarak, Şekil 7.22, açık-döngü transfer fonksiyonu $K/s(s+2)$ ve zaman gecikmesi 3 olan bir sistem için kök yer eğrisini gösteriyor, yani bu sistemin toplam açık-döngü transfer fonksiyonu $K e^{-3s}/s(s+2)$ olur. Bu sistem için, kapalı-döngü için karakteristik denklemi aşağıdaki gibidir:

$$s(s+2) + K e^{-3s} = 0$$

$K = 0$ için bir koşul $s = 0$ ve $s = -2$ 'dir. K aynı zamanda, $-3s = \infty$ için de sıfırdır. $s = \sigma + j\omega$ olduğundan, $\sigma = \infty$ olduğu zaman için ve 3ω , π 'nin tek katları olduğu zaman, yani $\omega = \pm\pi/3, \pm\pi, \pm\pi/3, \dots$ olduğu zaman, $-3s, \infty$ 'dur. Sıfırlar $K e^{-3s} = 0$ kullanılarak bulunur ve bu üsteli bir kuvvet serisi yoluyla genişletebileceğimizden:

$$e^{-3s} = 1 - 3s + 9s^2/2! - 27s^3/3! + \dots$$

bu denklemde sonsuz sayıda sıfır vardır.



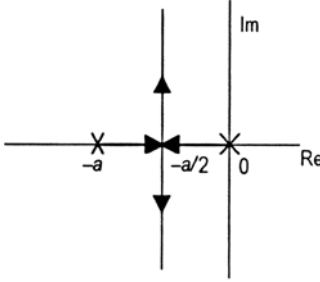
Şekil 7.22 Zaman gecikmeli bir sistem için kök yer eğrisi

Kök yer eğrilerini kullanarak çözümleme

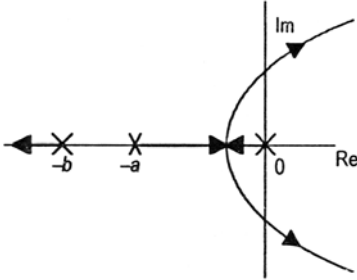
Kök yer eğrisi analizinin önemli bir kullanımı, sıfır ve/veya kutupların eklendiğinde veya hareket ettirildiğinde kök yer eğrisinin nasıl değiştiğini belirlemektir.

Kutup ve sıfır eklemenin etkileri

Genelde, açık-döngü transfer fonksiyonuna s -düzleminin sol yarısında bulunan bir kutup eklemenin, kök yer eğrisini s -düzleminin sağ tarafına doğru hareket ettirme ve eğme etkisi vardır. Bir örnek olarak, açık döngü transfer fonksiyonu $K/s(s + a)$ 'yı düşünün. Bu denklem, $s = 0$ 'da ve $s = -a$ 'da açık-döngü kutuplarına sahiptir. Kök yer eğrileri Şekil 7.23'te gösterildiği gibidir. Şimdi, b , a 'dan büyük olmak üzere, $s = -b$ 'de bir kutup eklemenin etkilerini düşünün. Bu, asimptotları $\pm 90^\circ$ 'den, $\pm 60^\circ$ 'ye ve reel eksenle olan kesişimi $-a/2$ 'den $(-a + b)/2$ 'ye değiştirme etkisine sahiptir, dolayısıyla Şekil 7.24'te gösterilen kök yer eğrisini verir.



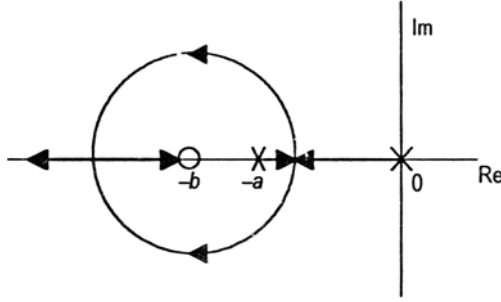
Figür 7.23 Açık döngü transfer fonksiyonu $K/s(s+a)$



Şekil 7.24 $s = -b$ 'de eklenen kutup

Şekil 7.23'te verilen sistem her zaman kararlı iken, K 'nın hiç bir değeri, s -düzleminin sol tarafında bir kök elde etmemizi sağlamaz; ekstra kutup sistemin (Şekil 7.24), şimdi kararsız hale gelmiştir.

Açık-döngü transfer fonksiyonuna s -düzlemin sol tarafında yer alan bir sıfır eklememizin etkisi, kök yer eğrisini s -düzleminin sol tarafına doğru hareket ettirmek veya eğmek etkisine sahiptir. Örnek olarak, açık döngü transfer fonksiyonu $K/s(s + a)$ 'yı ele alırsak, Şekil 7.23'te gösterilen kök yer eğrisini verir. Eğer $K(s + b)/s(s + a)$ 'yı verecek şekilde, b büyüktür a olmak üzere, bir sıfır eklersek, Şekil 7.24'te gösterilen kök yer eğrisini elde ederiz.



Şekil 7.25 Bir sıfır eklemenin etkileri

Kök duyarlılığı

K değişirken, bir kök konumunun duyarlılığı, *kök duyarlılığı* olarak adlandırılır ve s 'deki kesirli değişimin, bu değişime sebep olan K 'daki kesirli değişime oranı olarak tanımlanır, yani:

$$\text{duyarlılık} = \frac{ds/s}{dK/K} = \frac{K}{s} \frac{ds}{dK} \quad [30]$$

Bir kopma noktasında, $dK/ds = 0$ 'dır ve bu nedenle, duyarlılık sonsuzdur. İdeal olarak bir kontrol sisteminin kazanç K 'daki küçük değişimlere karşı duyarsız olması gerektiğinden, bu sonuç problemler yaratır. Böylece, kopma noktası veren K değerlerinden kaçınılmalıdır.

Kök eğrisi ve zaman düzlemi arasındaki ilişki

Aşağıda belirtildiği gibi, ikinci-derece bir kapalı-döngü transfer fonksiyonuna sahip bir sistem düşünün:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad [31]$$

Karakteristik denklemin köklerini, $s = \sigma \pm j\omega$ şeklinde yazabiliriz ve bu nedenle aşağıdaki ifadeyi elde etmeliyiz:

$$\begin{aligned} s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 &= (s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega) \\ &= s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2 \end{aligned}$$

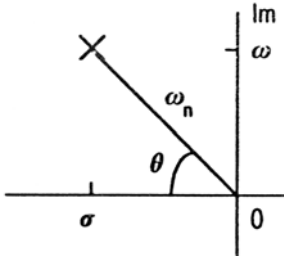
ve böylece:

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2 \quad [32]$$

ve:

$$\zeta\omega_n = \sigma \quad [33]$$

Fakat eğer sistem için, kök yer eğrisi çizimi üzerinde bazı noktaları ele alırsak (Şekil 7.26), denklem [32], üçgene uygulanan Pisagor teoreminin ω_n 'i, orijinden noktaya çizilen vektörün uzunluğu olarak verdiğini belirtir ve denklem [33], $\zeta = \sigma/\omega_n = \cos \theta$ 'yı verir ve bu nedenle sadece negatif reel eksenle vektör arasındaki açının kosinüsüdür.



Şekil 7.26 Kompleks kutup

Açık-döngü transfer fonksiyonu $K/s(s + 5)$ olan bir sistem düşünün. Bu sistemin kapalı-döngü transfer fonksiyonu $T(s)$ dolayısıyla aşağıdaki gibidir:

$$T(s) = \frac{K/s(s+5)}{1 + K/s(s+5)} = \frac{K}{s^2 + 5s + K} \quad [34]$$

Bu ikinci-derece bir sistemdir ve bu sistemin denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad [35]$$

Dolayısıyla aşağıdaki ifadeyi elde etmemiz gerekir:

$$2\zeta\omega_n = 5 \text{ ve } \omega_n^2 = K \quad [36]$$

Diyelim ki, maksimum yükselme miktarının % 10 olması isteniyor. Maksimum yükselme miktarı, aşağıdaki denklemde(denklem [34], ünite 5) verildiği gibidir:

$$\text{yükselme miktarı} = y_{ss} \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad [37]$$

$$\begin{aligned} \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} &= \ln 0.10 \\ -\zeta^2\pi^2 &= -2.3 + 2.3\zeta^2 \end{aligned}$$

ve bu nedenle, gereken sönümlleme faktörü ζ 0.4'ten büyük olmalıdır. Bu tip bir sönümlleme faktörü elde etmek için, denklem [36], $\omega_n = 6.25$ ve bu nedenle $K = 39$ olması gerektiğini belirtir.

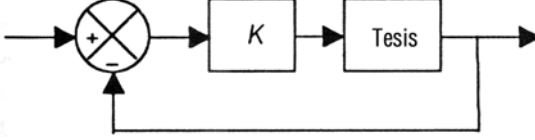
Sistem için kök yer eğrisi Şekil 7.27'de gösterilmiştir ve dolayısıyla K 'nın bu değerini veren kökler kompleks olacağından dolayı, bu kökler $-2.5 \pm j\omega'$ 'dir. denklem [32]'yi kullanırsak, $\omega'^2 = 2.5^2 + 6.25^2$ 'dir ve bu nedenle $\omega = 6.73$ rad/s'dir. $\zeta = \cos \theta$ olduğundan, $\theta = 66^\circ$ dir.

8. Kontrol sistem dizaynı

Kompansatörler ve kontrolörler birimleri

Kompanzasyon terimi, bir sistemin performans karakteristiklerini, gerekli karakteristikleri verecek şekilde modifikasyon veya kompanzasyon etmek için kullanılır. *Kompansatörler*, bir kontrol sistemine, kapalı-döngü performanslarını değiştirmek için eklenen elemanlardır. Bunlar, bir kontrol sisteminde herhangi bir yere eklenebilirler. *Kontrolörler*, bir hata sinyali girdisi alan ve sistem çıktısını değiştirmek için bir çıktı veren elemanlardır. Bunlar, dolayısıyla, bir kontrol devresinde özel bir noktada kullanılırlar. Dizayn anlamında bakacak olursak, kompansatörler ve kontrolörler arasında gerçek bir fark yoktur; bu iki, terim donanımında farklılıklar yansıtırlar. Geleneksel olarak, bir kontrolör, orantılı kazanç, integral ve türev etkisi gibi bir dizi kontrol modları sunan, tek başına bulunan bir elemandır ve bir toplama elemanı içerir.

Basit bir kontrol sistemi, Şekil 8.1’de gösterilen formdadır. Çıktı değişkeninden birim geri besleme, bir hata sinyali verecek biçimde set değeri ile karşılaştırılarak bir sinyal elde edilir ve bu hata sinyali, K kazancına sahip bir yükselteç/amplifikatör yardımıyla yükseltilerek elde edilen sinyal tesise verilir ve bu nedenle çıktı değişkeni değiştirilmiş olur. Yükselteç, hata sinyalini, tesis çıktısı için gerekli performans karakteristiklerini verecek biçimde değiştirir. Yükselteç burada kontrolördür. Bu aynı zamanda, sisteme özel bir noktada eklenmiş bir kompansatör olarak da düşünülebilir.



Şekil 8.1 Birim geri beslemeli sistem

Bir işlem tesisi için en basit model, $K/(s\tau + 1)$ olan bir transfer fonksiyonu ve bir T zaman gecikmesidir, yani $Ke^{-sT}/(s\tau + 1)$. Daha gerçekçi bir model, $Ke^{-sT}/(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)$ 'dir.

Kontrol modları

Temel kontrol modları aşağıdakiler gibidir:

- 1 Orantılı (P)
- 2 İntegral (I)
- 3 Türev (D)

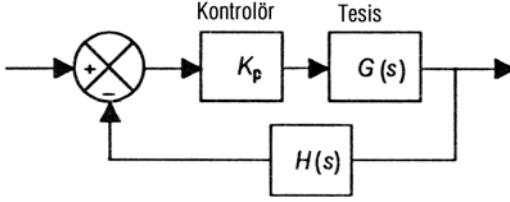
Türev, her zaman, orantılı ile veya hem orantılı hem de integral ile birlikte kullanılır. İntegral, genelde orantılı ile beraber veya hem orantılı hem de türevle beraber kullanılır. Üç modun bütün kombinasyonları *PID kontrol* veya *üç-terimli kontrol* olarak tanımlanır.

Orantılı

Kapalı-döngü bir kontrol için en basit mod *orantılı kontroldür*. Bu tip bir kontrolörde hata sinyali e üzerine etkiyen sabit bir K_p kazancı bulunur (Şekil 8.2):

$$\text{Kontrolör çıktısı} = K_p e \quad [1]$$

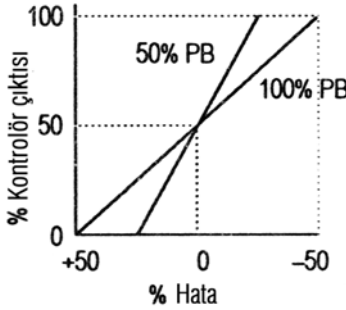
Kontrolör dolayısıyla, hata arttıkça buna orantılı olarak artan bir çıktı üretir; hata ne kadar büyükse, kontrolörün çıktısı da o kadar büyük olur. Eğer hata sabitse, kontrolör çıktısı da sabit olur.



Şekil 8.2 Orantılı kontrolör

Genelde, endüstriyel kontrolörlerde, kazanç *orantılı bant*(PB) terimiyle tanımlanır. orantılı bant, kontrolör çıktısında % 100 değişikliğe sebep olacak kısmi veya yüzdelik hata değişimidir (Şekil 8.3):

$$\% PB = \frac{\text{Hatadaki değisiklik}(\%)}{\text{Kontrolör ciktisindaki değisiklik}(\%)} [2]$$



Şekil 8.3 Orantılı bant

Hatadaki yüzdelik değişim, set değerinden yüzdelik sapmadır ve (sapma/ölçüm aralığı) $\times 100$ 'dür. % 100 kontrolör çıktısı, bir valfi % 100 tamamen açan bir sinyal olabilir, % 0 tamamen kapatan bir sinyal olabilir.

Bir e hatası için:

Orantılı bant(PB)

$$= \frac{e}{\text{ölçüm aralığı}} \frac{\text{kontrolör çıktı aralığı}}{\text{kontrolör çıktısındaki değişim}} [3]$$

Bunun sonucunda denklem [1]:

$$PB = \frac{1}{K_p} \frac{\text{kontrolör çıktı aralığı}}{\text{ölçüm aralığı}} [4]$$

veya:

$$\%PB = \frac{1}{K_p} \frac{\text{kontrolör çıktı aralığı}}{\text{ölçüm aralığı}} \times 100 [5]$$

Orantılı kontrollü birim geri beslemeli kapalı-döngü bir sistemin transfer fonksiyonu $T(s)$ aşağıdaki gibidir:

$$T(s) = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s)} [6]$$

Bu sistemin açık döngü transfer fonksiyonu da aşağıdaki gibidir:

$$= K_p G(s) [7]$$

Girdi sinyalinde bir değişim olduğu zaman, bu tip bir sistemde nelerin olacağını düşünelim. Çıktı, girdi sinyalini takip edecek mi? Eğer sistem orantılı kontrol yapılmadan önce tip 0 ise (5.bölüm'e bakınız), orantılı kontrol bunu değiştirmeyecektir ve dolayısıyla $X(s)$ girdisi için, aşağıdaki gibi bir kararlı-hal hatasını (denklem [13], bölüm 5) verecektir:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX(s)}{1 + K_p G(s)} [8]$$

Bir birim adım girdisi $X(s) = 1/s$ için, dolayısıyla:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K_p G(s)} [9]$$

Dolayısıyla, bir kararlı-hal hatası vardır. Durumu basitleştirmek için, $G(s)$ 'in sabit bir K kazancına eşit olduğunu düşünün. O halde, $K_p K$ ne kadar büyük olursa, kararlı-hal hatası o kadar küçük olur. Genelde K_p 'yi ne kadar büyük yaparsak, kararlı-hal hatası o kadar

küçük olacaktır. Dolayısıyla büyük kazançlı bir sistem, makul olarak girdiyi takip eden bir çıktı verecektir.

Şimdi de, orantılı kontrollü birim geri beslemeli kapalı-döngü bir kontrol sisteminde kararlılık sorununu düşünün:

$G(s) = K/(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)$ olan bir sistemimiz olduğunu düşünelim. Bu kapalı-döngü sistem için karakteristik denklem aşağıdaki gibidir:

$$(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1) + KK_p = 0$$

$$\tau_1\tau_2 + (\tau_1 + \tau_2)s + (1 + KK_p) = 0 \quad [10]$$

Routh tablosu bu nedenle aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{l|l} \text{Satır 0 : } s^2 & \tau_1 + \tau_2 \quad 1 + KK_p \\ \text{Satır 1 : } s^1 & \tau_1 + \tau_2 \\ \text{Satır 2 : } s^0 & 1 + KK_p \end{array}$$

Kararlılık için, eğer zaman sabitleri τ_1 ve τ_2 0'dan büyükse, $1 + K_pK > 0$ ve bu nedenle $K_pK > -1$ olmak zorunda. Yüksek kazançlı bir sistem için, dolayısıyla kararlı bir sistem olacaktır.

Eğer ikinci-derece olan karakteristik denklemini aşağıdaki gibi yazarsak:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

o halde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1 + KK_p}{\tau_1\tau_2}} \quad [11]$$

ve:

$$\zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1\tau_2\omega_n} \quad [12]$$

Büyük bir kontrolör kazancı büyük bir ω_n değeri küçük bir sönümleme faktörü demektir ve bunun sonucunda bir adım girdisi için, büyük bir geçici yükselme miktarı (denklem [34], 5.bölüm'e bakınız) demektir. Dolayısıyla düşük bir kararlı-hal hatası elde etmek için, büyük bir orantılı kazanç seçmek, büyük bir geçici yükselme miktarına yol açar.

Üçüncü-derece sistemlerde, yukarıda ikinci-derece sistemlerde olduğu gibi, yüksek bir orantılı kazanç düşük bir kararlı-hal hatası

verir fakat büyük bir yükselme miktarına sebep olur. Buna rağmen, K çok büyük alınırsa, kararsızlık oluşur.

Orantılı kontrolün önemli bir özelliği, tip 0 sistemlerde, bir set değeri değişiminden sonra bir kararlı-hal hatası vermesidir. Bu hata *offset* hatası olarak tanımlanır. Kontrolör, ancak bir offset olduğunda yeni bir çıktı verir.

Bir örnek olarak, transfer fonksiyonu $1/s(s + 1)$ olan bir tesisi ve orantılı kontrolü K_p olan birim geri beslemeli bir kontrol sistemi düşünün. Bu sistemin, açık-döngü transfer fonksiyonu $K_p/s(s + 1)$ olacaktır ve dolayısıyla bir tip 1 sistemidir. Böylece, bir adım girdisinde kararlı-hal hatası denklem [8]'de belirtildiği gibi, aşağıdaki gibi olacaktır:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX(s)}{1 + K_p G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(1/s)}{1 + K_p s(s+1)} = 0$$

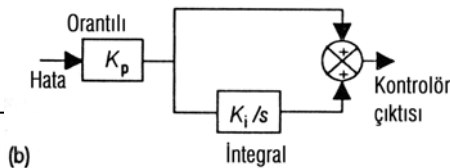
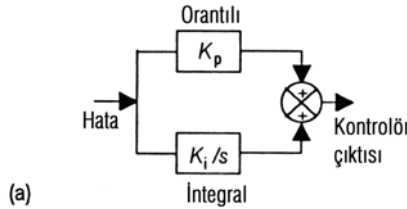
Bir rampa girdisi için, denklem [8] aşağıdaki ifadeyi verir:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(1/s^2)}{1 + K_p s(s+1)} = \frac{1}{K_p}$$

Dolayısıyla, sistem bir adım girdisi için sıfır kararlı-hal hatasına fakat bir rampa girdisi için bir kararlı-hal hatasına sahiptir.

PI kontrol

Orantılı kontrolörlerdeki offset sorununun üstesinden gelmek için, sıfır hata girdisinde, sonlu bir kontrolör çıkışı veren bir kontrolöre gerek vardır. Bu, hatanın zamana göre integraline orantılı biçimde bir çıktı veren ek bir elemanla (Şekil 8.4) orantılı terimi arttırmak suretiyle sağlanır.



Figür 9.4 PI Kontrol, iki alternatif model

Orantılı eleman, bir e hata girdisine ve bir de $K_p e$ çıkışına sahiptir. Şekil 8.4(a)'da, integral elemanı hata e şeklinde bir girdiye ve K_i integral kazancı olmak üzere, hatanın zamana bağlı integraline orantılı bir çıkışa sahiptir, yani:

$$K_i = \int e dt$$

Dolayısıyla kontrolör çıkışı:

$$\text{kontrolör çıkışı} = K_p e + K_i \int e dt \quad [13]$$

Laplace dönüşümü cinsinden, denklem [13] aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\text{kontrolör çıkışı}(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) E(s) \quad [14]$$

Bu denklem de, *zaman integral sabiti* $T_i = K_p/K_i$ olmak üzere, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\text{kontrolör çıkışı}(s) = \frac{K_p}{s} \left(s + \frac{1}{T_i} \right) E(s) \quad [15]$$

Şekil 8.4(b)'de, integral elemanı, $K_p e$ şeklinde bir girdiye ve K_i integral kazancı olmak üzere, bu girdinin zamana bağlı integraline orantılı bir çıkışa sahiptir, yani:

$$K_p K_i \int e dt$$

Dolayısıyla kontrolör çıkışı aşağıdaki gibidir:

$$\text{kontrolör çıkışı} = K_p \left(e + K_i \int e dt \right) \quad [16]$$

Laplace dönüşümü cinsinden, denklem [15] aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\text{kontrolör çıkışı}(s) = K_p \left(1 + \frac{K_i}{s} \right) E(s) \quad [17]$$

Bu denklem de, *zaman integral sabiti* $T_i = K_p/K_i$ olmak üzere, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\text{kontrolör çıktısı}(s) = \frac{K_p}{s} \left(s + \frac{1}{T_i} \right) E(s) \quad [18]$$

Denklem [15] veya [18]'de verildiği gibi, kontrolör $G_c(s)$ 'in transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$G_c(s) = \frac{K_p}{s} \left(s + \frac{1}{T_i} \right) \quad [19]$$

ve dolayısıyla birim geri besleme kapalı-döngü, G_p tesis fonksiyonuna sahip bir kontrol sisteminin açık-döngü transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{K_p}{s} \left(s + \frac{1}{T_i} \right) G_p(s) \quad [20]$$

Denklem [20]'nin belirttiği gibi, PI kontrolörü, $1/s$ faktörüyle ifade edilir ve integral etkisine sahiptir ve bu nedenle $s = 0$ 'da bir kutup değeri ortaya çıkar. Aynı zamanda $s = -1/T_i$ 'de bir kutup meydana getirir. Açık-döngü transfer fonksiyonuna $1/s$ faktörünün eklenmesi, sistemi tip 1 sistemine dönüştürür ve bu nedenle artık bir tip 0 sistemi değildir.

Böylece diğer durumda sadece orantılı kontrolle bir birim girdi ile oluşan kararlı-hal hataları temizlenir ve ofset oluşmaz.

Yeni bir kutup ve yeni bir sıfır oluştuğundan, kutup sayısı n ve sıfır sayısı m arasındaki fark değişmeden korunur ve böylece kök yer eğrisinin asimptot açıları değişmez. Buna rağmen, asimptotların reel eksenle kesişim noktası, orijinin yanına taşınır ve bunun sonucunda, göreceli kararlılıkta bir miktar azalma olur. Kesişim noktası $+(1/T_i)(n-m)$ kadar yer değiştirir. Böylece sistem PI kontrolüyle, sadece P kontrol ile sağlanandan daha az kararlı hale gelir.

Sonuçta bunun etkisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

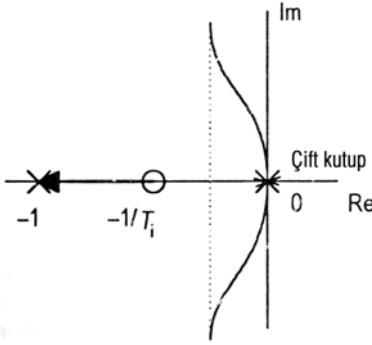
- 1 İntegral terimi, kontrolörün ne kadar hızlı sıfır hata elde edeceğini belirleyen integral zaman sabiti yardımıyla, herhangi bir kararlı-hal hatasını yok edecek biçimde seçilir, integral zaman sabiti ne kadar büyük olursa, işlem o kadar uzun sürer.
- 2 Orantılı kazanç, göreceli kararlılığı belirleyecek biçimde seçilir.

Bir örnek olarak, $1/s(s + 1)$ transfer fonksiyonuna sahip bir tesisi olan bir birim geri beslemeli kontrol sistemine uygulanan PI

kontrolünü düşünün. Denklem [20]'ye göre, sistem aşağıdaki açık-döngü transfer fonksiyonuna sahip olacaktır:

$$\frac{K_p[s+1/T_i][1/s(s+1)]}{s} = \frac{K_p(s+1/T_i)}{s^2(s+1)}$$

Böylece, sistem, kontrolörün varlığında tip 1 sistem iken; şimdi tip 2 sistemidir. Bir adım girdisine ve bir rampa girdisine karşı gelen kararlı-hal hatası böylece 0'dır. Sistem, bir tane $s = -1$ 'de, bir çift $s = 0$ 'da açık-döngü kutuplarına ve $s = -1/T_i$ 'de bir sifıra sahiptir. Şekil 8.5, bu sistemin kök yer eğrisini gösteriyor:



Şekil 8.5 Kök yer eğrisi

PID kontrol

Şekil 8.6, orantılı ve türev kontrollü bir kontrolörün temel formunu gösteriyor.

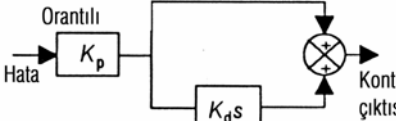
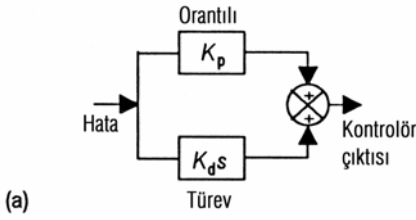
Orantılı kontrol elemanı, hata e girdisine ve $K_p e$ çıkışına sahiptir. Figür 9.6(a)'da, türev elemanı e girdisine ve K_d türev kazancı olmak üzere, hatanın zamana göre türevine orantılı bir çıkışa sahiptir, yani:

$$K_d = \frac{de}{dt}$$

Böylece kontrolör çıkışı aşağıdaki gibidir:

$$\text{kontrolör çıkışı} = K_p e + K_d \frac{de}{dt} \quad [21]$$

Türev kontrol elemanı, hatanın zamana göre değişimine tepki verir ve böylece, ileri zamandaki hata büyümesini tahmin eder ve hata büyümeden önce düzeltici bir etki sağlar. Buna rağmen, eğer hata sabit ise, türev kontrolü tek başına düzeltici bir etki sağlamaz. Türev kontrolünün ana dezavantajı, tek başına yavaş değişen hatalara duyarsızdır ve hata birikmesine sebep olur. Bu sebeple tek başına kullanılmaz. Bu, orantılı kontrolle birleştirilirse, orantılı kontrolün, yavaş değişen hatalara tepki vermesi ve türev kontrol elemanının hatanın değişim hızına tepki vermesi sağlanır.



Şekil 8.6 PD Kontrolör, iki alternatif model

Laplace dönüşümü cinsinden, [21.] denklem aşağıdaki gibidir:

$$\text{kontrolör çıkışı}(s) = (K_p + K_d s)E(s) \quad [22]$$

Bu denklem de, $T_d = K_d/K_p$ olmak üzere, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\text{kontrolör çıkışı}(s) = K_d \left(s + \frac{1}{T_d} \right) E(s) \quad [23]$$

T_d türev zaman sabiti olarak adlandırılır.

Kontrolör $G_c(s)$ 'in transfer fonksiyonu, denklem [23] kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$G_c(s) = K_d \left(s + \frac{1}{T_d} \right) \quad [24]$$

ve böylece, tesis transfer fonksiyonu G_p olan bir birim kapalı-döngü kontrol sisteminin açık-döngü transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

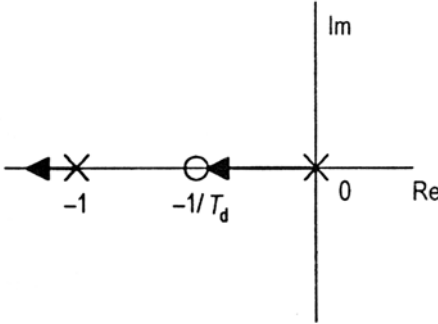
$$G_c(s)G_p(s) = K_d \left(s + \frac{1}{T_d} \right) G_p(s) \quad [25]$$

Böylece, bunun etkisi $s = -1/T_d$ 'de bir sıfır eklemektir.

Örnek olarak, $1/s(s + 1)$ transfer fonksiyonuna sahip bir tesisi olan bir birim geri beslemeli kontrol sistemine uygulanan PD kontrolünü düşünün. Denklem [25]'e göre, sistem aşağıdaki açık-döngü transfer fonksiyonuna sahip olacaktır:

$$\frac{K_d(s + 1/T_d)}{s(s + 1)}$$

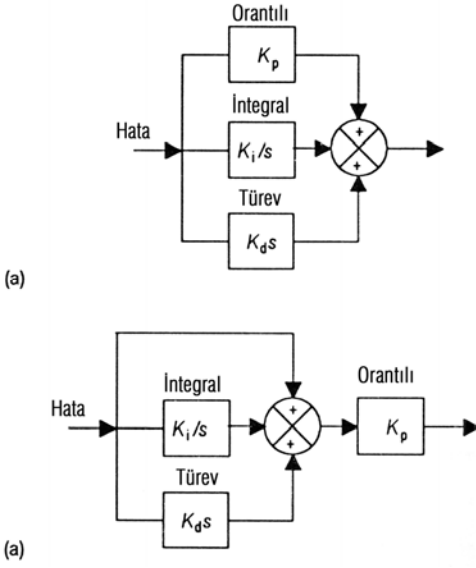
Böylece, sistem, kontrolör olmadan önce tip 1 sistem iken, hala tip 1'dir. Kararlı-hal hatası böylece, bir adım girdisi için, sadece sıfırdır. Sistem, $s = 0$ 'da ve $s = -1$ 'de açık-döngü kutuplarına ve $s = -1/T_d$ 'de bir sıfıra sahiptir. Şekil 8.7, bu sistemin, kök yer eğrisini gösteriyor.



Şekil 8.7 Kök yer eğrisi

Üç terimli kontrolörler

Bir orantılı, integral ve türev kontrolörü, PID veya *üç-terimli kontrolör* olarak tanımlanır. Şekil 8.8, bu tip kontrolörlerin temel formunu gösteriyor.



Şekil 8.8 PID Kontrolör, alternatif modeller

Şekil 8.8(a)'da, kontrolör çıktısı aşağıdaki gibidir:

$$\text{çıkıtı} = K_p e + K_i \int e dt + K_d \frac{de}{dt} \quad [26]$$

Bunun Laplace dönüşümünü alırsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\begin{aligned} \text{çıkıtı}(s) &= K_p \left(1 + \frac{K_i}{K_p s} + \frac{K_d}{K_p} s \right) E(s) \\ &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s) \end{aligned} \quad [27]$$

Figür 9.8(b) de aynı denklemi verir. Kontrolörün transfer fonksiyonu böylece, aşağıdaki gibidir:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad [28]$$

ve sistemin açık-döngü transfer fonksiyonu, aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} G_c(s)G_p(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) G_p(s) \\ &= \frac{K_p T_d (s^2 + s/T_d + 1/T_i T_d) G_p(s)}{s} \end{aligned} \quad [29]$$

Böylece, PID kontrolörü, sistem tipini 1 adım yükseltir. Sıfırların sayısını 2 ve kutup orijinde olmak üzere, kutupların sayısını 1 arttırır.

Böylece, bir sistemin performansını belirlemek için ayarlanması gereken üç kontrolör parametresi vardır; K_p , T_d ve T_i . Bu ünitenin bir sonraki bölümünde, optimum ayarları belirlemek için kullanılacak deneysel metotlara bakacağız. Burada, sadece, T_i değerini $4T_d$ olarak ayarlamayı içeren, yaygın olarak kullanılan bir yaklaşımı dikkate alacağız. Bunun sonucunda, denklem [29]'u, aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} G_c(s)G_p(s) &= \frac{K_p T_d [s^2 + s/T_d + 1/2T_d^2] G_p(s)}{s} \\ &= \frac{K_p T_d (s + 1/2T_d)^2 G_p(s)}{s} \quad [30] \end{aligned}$$

Böylece, PID kontrolörü $s = 0$ 'da bir açık-döngü kutbuna ve $s = -1/2T_d$ 'de çift sıfıra sahiptir.

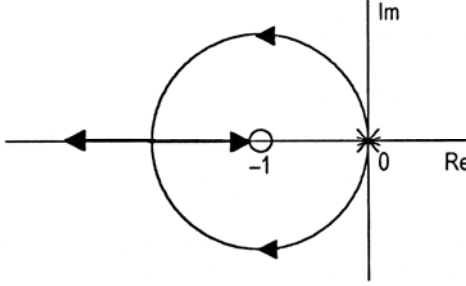
Örnek olarak, $1/s(s + 1)$ transfer fonksiyonuna sahip bir tesisi olan bir birim geri beslemeli kontrol sistemine uygulanan PID kontrolünü düşünün. Denklem [30]'a göre, sistem aşağıdaki açık-döngü transfer fonksiyonuna sahip olacaktır:

$$\begin{aligned} G_c(s)G_p(s) &= \frac{K_p T_d [s + 1/2T_d^2] [1/s(s + 1)]}{s} \\ &= \frac{K_p T_d [s + 1/2T_d^2]}{s^2 + (s + 1)} \end{aligned}$$

Sistem böylece, bir tip 2 sistemidir ve bu nedenle, adım ve rampa girdileri için, kararlı-hal hatası yoktur. Eğer $T_d = 0.5$ ise, açık-döngü transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{0.5K_p(s + 1)}{s^2}$$

ve sistem, $s = -1$ 'de bir açık-döngü sıfırına ve $s = 0$ 'da bir çift açık-döngü kutbuna sahiptir. orijinal kutuplardan biri, kontrolör tarafından oluşturulan bir sıfırla iptal edilir. Şekil 8.9, bu sistemin kök yer eğrisi çizimini gösteriyor.



Şekil 8.9 Kök yer eğrisi

Kontrolör kazançlarının ayarlanması

Sadece orantılı kontrolör kullanan bir kontrol sistemi ile, K_p değeri, kontrol sistemin girdilere tepki vermesini belirleyecek biçimde seçilmelidir. Bir PI kontrolü ile, uygun K_p ve K_i seçilmelidir. Bir PID kontrolü ile, uygun K_p , K_i ve K_d değerleri seçilmelidir. Bu tip seçimler, kontrolör tarafından oluşturulan kutup ve sıfırların konumlarının ve bundan dolayı kontrol sisteminin girdilere tepkisinin belirlenmesine olanak verir. *Akort etme* terimi, optimum kontrolör ayarlarını seçme işlemi tanımlamak için kullanılır.

Akort etmek için en sık kullanılan deneysel metotlar, Ziegler ve Nichols'tur. Ziegler ve Nichols, açık-döngü fonksiyonunun, zaman gecikmeli birinci-derece bir sisteme yakınsanabileceğini varsaymışlardır, yani $Ke^{-sT}/(s\tau+1)$ formunda bir transfer fonksiyonu. İki tane akort etme prosedürü geliştirmişlerdir; bunlardan birisi kapalı-döngü test sonuçlarının kullanımına dayalı *son halka metodu* olarak adlandırılan metot, diğeri, açık-döngü test sonuçlarının kullanımına dayalı *proses reaksiyon metodu* olarak adlandırılan metottur. Her iki metot da, $1/4$ sönümleme oranı ile alt sönümlü geçici tepkilerle sonuçlanan ayarları vermek için tasarlanmıştır.

Son halka metodu

Kullanılan prosedür aşağıdaki gibidir:

- 1 Kontrolörü manuel çalışma moduna ve tesisi normal çalışma koşullarına ayarlayın
- 2 Orantılı kontrol dışındaki bütün kontrol modlarını kapatın.

- 3 K_p 'yi düşük bir değere getirin, yani orantılı kontrol bant büyük bir değere getirin.
- 4 Kontrolörü otomatik moda getirin ve küçük bir set noktası değişimi oluşturun, yani % 5 ile % 10 arasında.
- 5 Tepkiyi gözlemleyin.
- 6 K_p 'yi bir miktar yüksek bir değere getirin, yani orantılı kontrol bant aralığını biraz daraltın.
- 7 Küçük bir set noktası değişimi oluşturun, yani % 5 ile % 10 arasında.
- 8 Tepkiyi gözlemleyin.
- 9 6., 7. ve 8. adımları, tepki, büyümeyen ve bozunmayan güçlendirilmiş bir salınım elde edene kadar tekrar edin. Bu koşulu sağlayan K_p değerini (K_{pu}) ve salınının periyodunu (T_u) not edin.
- 10 Tablo 8.1'i kullanarak, optimum kontrol ayarlarını belirleyin.

Tablo 8.1 *Son halka metodundan ayarlamalar*

Kontrolör tipi	K_p	T_i	T_d
P	0.5 K_{pu}		
PI	0.45 K_{pu}	$T_u/1.2$	
PID	0.6 K_{pu}	$T_u/2$	$T_u/8$

Açık-döngü transfer fonksiyonu $6/(s+1)(s+2)(s+3)$ olan bir tesis için kontrolör ayarlarının belirlenmesini düşünün. Orantılı kontrol dışında bütün kontrol modları kapatılırsa aşağıdaki karakteristik denkleme sahip bir transfer fonksiyonunu verir:

$$(s+1)(s+2)(s+3) + 6K_p = 0$$

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 6K_p = 0$$

Routh tablosu böylece aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{array}{l|ll} \text{Satır 0: } s^3 & 1 & 11 \\ \text{Satır 1: } s^2 & 6 & 6 + 6K_p \\ \text{Satır 2: } s^1 & 10 - K_p & \end{array}$$

Sistemin marjinal olarak kararlı olabilmesi ve sürekli bir salınım vermesi için, $10 - K_{pc} = 0$ olmalıdır ve bu nedenle $K_{pc} = 10$ 'dur. Salınımların frekansı, birinci satır için yazılan $6s^2 + 6s + 6 \times 10 = 0$

denklemini yardımıyla bulunur ve bu nedenle $s = \sqrt{11}$ 'dir. s -düzleminin sanal eksenindeki bu nokta için, $\omega = \sqrt{11}$ rad/s'dir. Böylece salınımların periyodu $T_u = 2\pi/\omega = 1.9$ s'dir. Böylece, Tablo 8.1'i kullanırsak, bu PID kontrol için, $K_p = 0.6 K_{pc} = 6$, $T_i = T_u/2 = 0.95$ s ve $T_d = T_u/8 = 0.21$ s bulunur.

Proses reaksiyon metodu

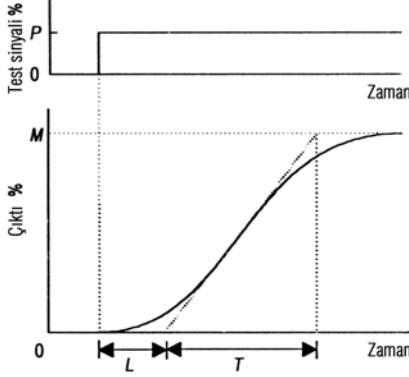
Test prosedürü aşağıdaki gibidir:

- 1 Genellikle kontrolör ile düzeltici elemanlar arasında bulunan kontrol döngüsünü açın, böylece kontrol faaliyeti gerçekleşmesin.
- 2 Kontrolörü manuel moda ve tesisi normal çalışma koşullarına getirin.
- 3 Düzeltici elemana küçük bir adım değişikliği uygulayın ve sistem tepkisini kaydedin.

Sistemin verdiği tepkinin zamana karşı çizilen grafiği, *proses reaksiyon eğrisi*'dir (Şekil 8.10). Bu eğri, sistemin kontrolör çıkışındaki bir adım değişikliğine nasıl tepki verdiğini gösterir. Test sinyali, düzeltici elemandaki yüzde değişimi ifade edilir ve çıktı, tam-ölçü aralığının yüzdesi olarak ifade edilir. Proses reaksiyon eğrisine maksimum gradyanı verecek şekilde bir tanjant çizilir; maksimum gradyan $R = M/T$ olarak ölçülür. Test sinyalinin başlangıç noktası ve tanjant ile kesişme anı arasındaki zaman, geciktirme L olarak tanımlanır. Tablo 8.2, kontrolör ayarlarını belirlemek için, Ziegler ve Nichols tarafından verilen kriteri gösteriyor.

Tablo 8.2 Proses reaksiyon eğrisi metodunda ayarlamalar

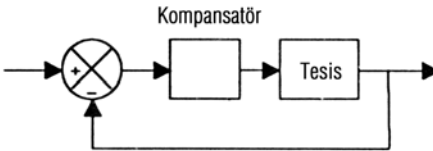
Kontrolör tipi	K_p	T_i	T_d
P	P/RL		
PI	$0.9P/RL$	$3.3L$	
PID	$1.2P/RL$	$2L$	$0.5L$



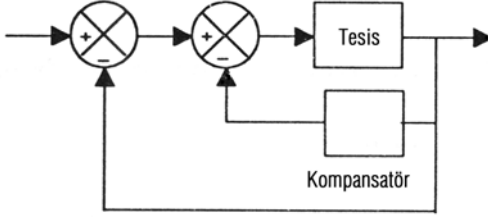
Şekil 8.10 Proses reaksiyon eğrisi

Kompanzasyon

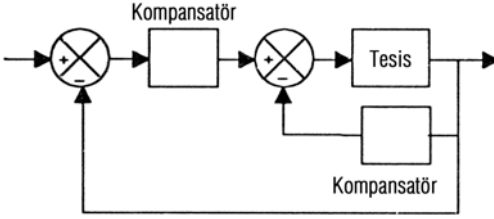
Sadece kazancı ayarlayarak, kapalı-döngü bir kontrol sistemi için gerekli performansı elde etmek her zaman mümkün olmayabilir ve böylece, gerekli performansı elde etmek için, sisteme performans *kompanساتörleri* eklenebilir. Eğer bu kompanساتörler, sistemin ileri yoluna konursa, *seri* veya *kaskat kompanساتörler* olarak (şekil 8.11) ve eğer geri besleme yoluna konursa, *geri besleme kompanساتörleri* (Şekil 8.12) olarak adlandırılır. Sistem hem seri hem de geri besleme kompanساتörüne sahip olabilir (Şekil 8.13). Kompanzasyon, gerekli performansı elde etmek için, sistemin, kök yer eğrisinin veya frekans tepkisinin değiştirilmesi olarak görülebilir.



Şekil 8.11 Seri ya da kaskat kompanizasyon



Şekil 8.12 Geri besleme kompanzasyonu



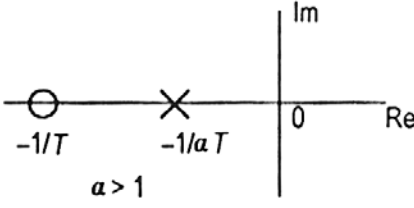
Şekil 8.13 Seri geri besleme kompanzasyonu

Geciktirme kompanzasyonu

Kararlı olan ve yeterli bir geçici tepkiye sahip olan, fakat büyük bir kararlı-hal hatası bulunan bir kapalı-döngü kontrol sistemi, seri geciktirme kompansatörü kullanılarak geliştirilebilir. Bir geciktirme kompansatörünün transfer fonksiyonu, $a > 1$ olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$G_c(s) = \frac{1 + T_s s}{1 + a T_s s} \quad [31]$$

Kompansatör, $s = -1/aT$ de bir kutba ve $s = -1/T$ de bir sifıra sahiptir. a her zaman 1'den büyük olduğundan, kutup her zaman s -düzlemindeki sıfırın sağında yer alır. Kutup ve sıfır arasındaki mesafe a 'nın değeri ile belirlenir. Şekil 8.14, bu sistemin kutup-sıfır diyagramını gösteriyor.

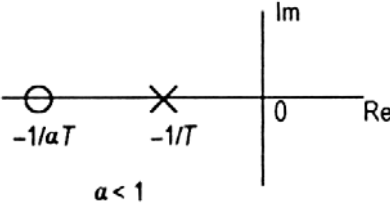


Şekil 8.14 Bir geciktirme kompensatörü için kutup-sıfır diyagramı

Denklem [31] için, bazen kullanılan, alternatif bir versiyon, $a < 1$ olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$G_c(s) = \frac{1+aT_s}{1+T_s} \quad [32]$$

Kompensatör, $s = -1/T$ de bir kutba ve $s = -1/aT$ de bir sıfıra sahiptir. a her zaman 1'den küçük olduğundan, kutup her zaman s -düzlemindeki sıfırın sağında yer alır ve Şekil 8.14'teki gibi aynı kutup-sıfır düzenlemesi elde edilir (şekil 8.15).



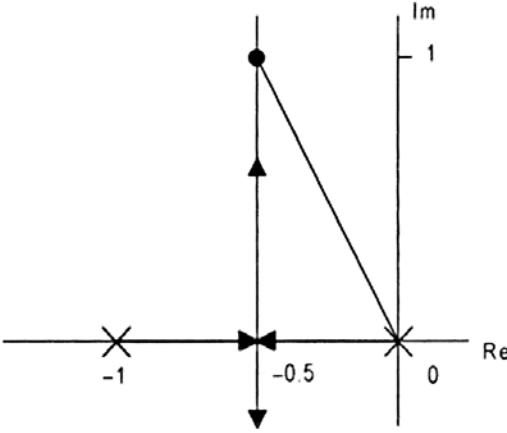
Şekil 8.15 İlerletmeli bir kompensötör için kutup-sıfır diyagramı

Faz-geciktirme kompensatörü kullanma stratejisi, kompensatörün transfer fonksiyonunun kutup ve sıfırını birbirine çok yakın duruma getirmektir ve kararlı-hal hatasını azaltmak için bu sıfır ve kutup ikilisini orijine nispeten yakın konuma getirmektir. Eğer kutup orijine yerleştirilirse, bir integratör ve $1/s$ terimi oluşur. Kompensatör, bu sebeple, PI kontrolün daha genel bir formu olarak görülebilir.

Bir örnek olarak, açık-döngü transfer fonksiyonu $K/s(s+1)$ olan bir sistemi düşünün. bu tip bir sistem, Şekil 8.16'da gösterilen kök

yer eğrisine sahiptir. Eğer istenilen sönümleme faktörü $\zeta = 0.45$ olursa, (Bölüm 7'ye bakınız) yer eğrisi üzerindeki kök $-0.5 \pm j1$ olur ve bu reel negative eksenle 63° lik bir açı yapar ve $\cos 63^\circ = 0.45$ olur. Orijindeki kutuptan, bu noktaya çizilen vektör, $\sqrt{1.25}$ uzunluğuna ve -1 'deki bir kutup içinde aynı uzunluğa sahiptir. Böylece, K 'nın değeri 1.25 'tir (Denklem [13]'e bakınız, 7.bölüm). Sistem tip 1 sistemdir ve bu nedenle bir rampa girdisi için kararlı-hal hatası aşağıdaki gibidir (Bölüm 5'e bakınız):

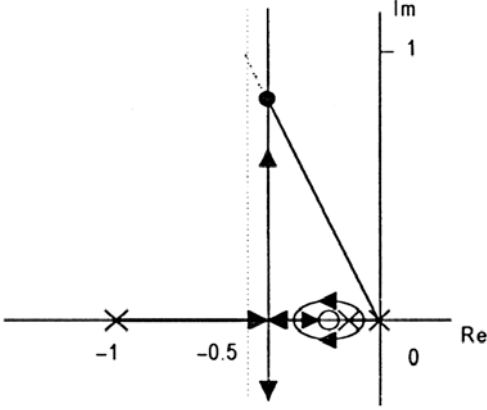
$$e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sH(s)G(s)} = \frac{1}{K} = 0.8 \quad [33]$$



Şekil 8.16 *Kompanse edilmemiş*

Şimdi de seri geciktirme-kompanzasyonu olan bir sistem düşünün ve aynı sönümleme faktörü elde etmeye çalıştığımızı varsayalım. Şekil 8.17, bu sistemin kök yer eğrisi çizimini gösteriyor. Kompansatörün kutup ve sıfırı birbirine yakın olduğundan (sadece kompansatör sıfırının etrafında küçük bir döngü oluşturduğundan) orijinal kök yer eğrisinin şekli üzerinde çok az etkili olabilirler. Buna rağmen, kök yer eğrisi üzerindeki K 'nın değeri, aynı sönümleme faktörü için farklıdır.

Kompanse edilmemiş sistem için, büyüklük koşulu (denklem [13], 8. bölüm) kök yer eğrisi üzerindeki bir noktadaki K 'nın değerini aşağıdaki gibi verir:



Şekil 8.17 Kompanse edilmiş sistem

$$|s||s+1| = \frac{1}{K} \quad [34]$$

Kompanse edilmiş sistem için, büyüklük koşulu kök yer eğrisi üzerindeki bir noktadaki K 'nın değerini aşağıdaki gibi verir:

$$\frac{|s||s+1| |s+1/T|}{a|s+1/aT|} = \frac{1}{K} \quad [35]$$

Oluşturulan kutup ve sıfır birbirine yakın olduğundan, makul bir yakınsama elde ettik:

$$\frac{|s||s+1|}{a} = \frac{1}{K} \quad [36]$$

Aynı sönümlleme için, orijinden uzakta bulunan noktalarda, K değerinin kompanse edilmemiş sisteme göre $1/a$ faktörü ile değişmesi lazımdır. Bunun bir sonucu olarak, a 1'den küçük olduğundan, kararlı-hal hatası azaltılmıştır. Böylece, eğer kompanse edilmiş sistem için kararlı-hal hatasının 0.1 olmasını istiyorsak, $a = 0.01/0.8 = 0.125$ olmalıdır.

Kök yer eğrisi çizimi kullanılarak yapılacak kompensatör dizayn prosedürü aşağıdaki gibidir:

- 1 Kompanse edilmemiş sistemin kök-yer eğrisi çizimini belirleyin.

- 2 Sistemin geçici performans spesifikasyonlarını belirleyin ve kompanse edilmemiş çizimde, spesifikasyonları sağlayacak dominant kutupların yerini belirleyin.
- 3 İstenilen kök konumundaki döngü kazancını ve böylece sistem hata sabitini hesaplayın.
- 4 Kompanse edilmemiş hata sabiti ile istenilen hata sabitini karşılaştırın ve kompensatör eklendiğinde oluşacak gerekli artış miktarını belirleyin ve buradan a 'yı elde edin.
- 5 Kompensatörün kutup ve sıfır konumlarını belirleyin, böylece, kompanse edilmiş kök yer eğrisi gerekli kök konumundan geçsin.

Yukarıdaki prosedürde, seri bir geciktirme kompensatörü eklemenin s-bölgesindeki etkilerini hesaba kattık. Şimdi de frekans bölgesinde düşünelim. Aşağıdaki gibi bir transfer fonksiyonuna sahip bir kompensatör için:

$$G_c(s) = \frac{1 + aT_s}{1 + T_s} \quad [37]$$

frekans bölgesinde, frekans tepkisi aşağıdaki gibidir:

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + jaT\omega}{1 + jT\omega} \quad [38]$$

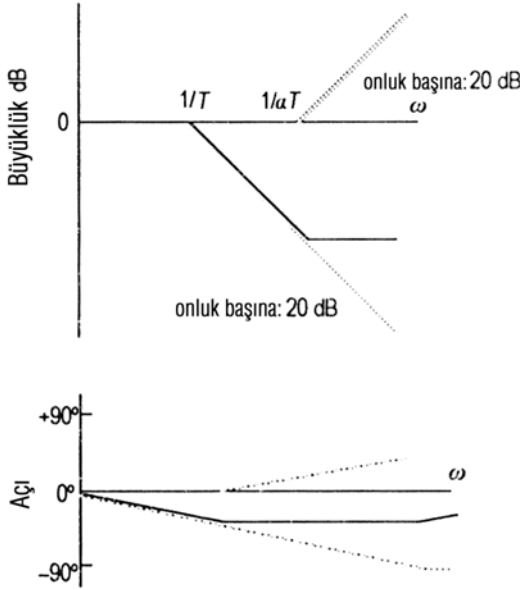
Bode çizimi, transfer fonksiyonları $(1 + aTs)$ ve $1/(1 + Ts)$ olan iki tane seri sistem olarak düşünülebilir. Böylece, reel bir sıfıra ve reel bir kutuba sahibiz ve bu nedenle (Bölüm 6'e bakınız) Bode çizimi, Şekil 8.18'de gösterildiği gibidir.

Geciktirme kompensatörünün büyüklüğü, $1 + aTs$ ve $1/(1 + Ts)$ elemanlarına bağlı bir toplamdır. Bu da aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} & \text{dB cinsinden büyüklük} \\ &= 20 \lg \sqrt{1 + a^2 \omega^2 T^2} + 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ &= 20 \lg \sqrt{1 + a^2 \omega^2 T^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \end{aligned} \quad [39]$$

Bu, düşük frekanslarda birim büyüklüğünde, yüksek frekanslarda, $20 \lg a$ büyüklüğündedir. Frekans tepkisinin açısı aşağıdaki gibidir:

$$a\phi = \tan^{-1} a\omega T - \tan^{-1} \omega T \quad [40]$$



Şekil 8.18 Bir geciktirme kompensatörü için, Bode çizimi asimptotları

Faz açısı, kompensatörün frekans aralığının ortasında negatiftir.

Tesis ve seri bir geciktirme kompensatörü ile, düşük frekans kazancı etkilenmez; fakat sistemin toplam kazancı, kazanç-geçiş bölgesinde azalır ve bu nedenle kararlılığı gelişir. Kazancı değiştirmenin yanında, geciktirme kompensatörü çok düşük frekanslarda küçük bir faz geciktirmesi oluşturur ve yüksek frekanslarda iki kırılma değeri arasında daha büyük bir faz gecikmesi oluşturur. Böylece, kompensatör sadece sistemin toplam kazancını azaltmakla kalmaz, faz geciktirmesini de artırır.

Bir tesisin kazanç-geçiş frekansını ω_c 'ye indirmek istediğimizi varsayalım. Genel olarak, bu işlem, kırılma frekansı $1/aT$ 'yi, yaklaşık olarak yeni kazanç-geçiş frekansının bir decade(onluk) aşağısına çekerek yapılır. Böylece:

$$\frac{1}{aT} = \frac{\omega_c}{10} \quad [41]$$

Yeni kazanç-geçiş frekansında, büyüklüğü 0 dB'ye getirmek için, kompensatör, bu frekanstaki tesis büyüklük eğrisindeki azalma/zayıflama miktarıyla aynı değeri sağlamalıdır, yani:

$$|G_p(j\omega_c)| = -20 \lg a \quad [42]$$

Kompensatör dizayn prosedürü aşağıdaki gibidir:

- 1 Kompanse edilmemiş sistemin Bode çizimini çizin.
- 2 Kompanse edilmemiş sistemin faz marjini belirleyin.
- 3 Faz marjininin yeterli olmadığını varsayarak, faz marjini gereksiniminin sağlanacağı frekansı belirleyin, eğer büyüklük çizimi o frekansta 0 dB çizgisinden geçiyorsa. Yeni geçiş frekansını belirlerken, geciktirme kompensatöründen 5°'lik bir gecikmeye olanak sağlayın.
- 4 Kompensatörün sıfırını yeni geçiş frekansından bir decade(onluk) aşağıya yerleştirin.
- 5 Büyüklüğün bu frekanstan geçtiğinden emin olmak için, bu frekanstaki gerekli azalma/zayıflama miktarını belirleyin.
- 6 a 'yı belirlemek için denklem [42]'yi kullanın.
- 7 Denklem [41]'i kullanarak T değerini belirleyin.
- 8 Kutup ve sıfır konumları, bu sebeple kompensatörün transfer fonksiyonu, bu a ve T değerleri kullanılarak elde edilebilir.

İlerletme kompanzasyonu

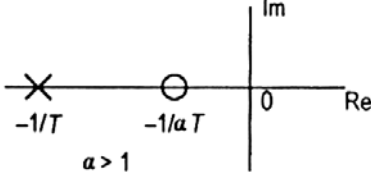
Kompensatör, $s = -1/aT$ 'de bir kutba ve $s = -1/T$ 'de bir sıfıra sahiptir. a her zaman 1'den büyük olduğundan; kutup her zaman s -düzlemindeki sıfırın solunda yer alır. Kutup ve sıfır arasındaki mesafe a 'nın değeri ile belirlenir. Şekil 8.19, bu sistemin kutup-sıfır diyagramını gösteriyor. İlerletmeli bir kompensatörün transfer fonksiyonu böylece aşağıdaki gibidir:

$$G_c(s) = \frac{s+1/aT}{s+1/T} \quad [43]$$

Bu denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$G_c(s) = \frac{1}{a} \frac{1+aT_s}{1+T_s} \quad [44]$$

Özel bir durum olarak, orijinde sıfır bulunursa ve kutbun etkisi ihmal edilirse, türev kontrolörü elde edilir.

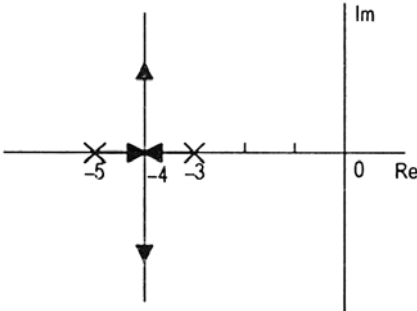


Şekil 8.19 İlerletmeli bir kompensatör için kutup-sıfır diyagramı

Kutbun sağındaki sıfırın sebebi, ilerletme kompensatörlerinin kapalı-döngü kontrol sistemlerinin kararlılığını geliştirebilmesidir. Örnek olarak, açık-döngü transfer fonksiyonu $K/(s + 3)(s + 5)$ olan bir tesisle seri olan bir ilerletme kompensatörünün etkisini düşünün. Şekil 8.20, kompanse edilmemiş tesis için, kök yer eğrisi çizimini gösteriyor.

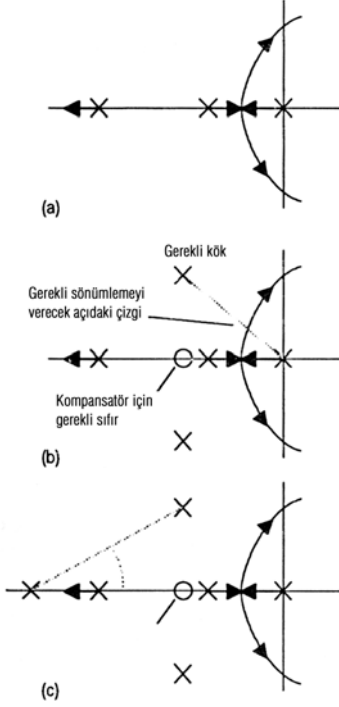
Şimdi de $a = 2$ ve $T = 1/2$ olan bir seri ilerletme kompensatörü düşünün, yani transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olan bir kompensatör:

$$G_c = \frac{s+1}{s+2}$$



Şekil 8.20 Kompanse edilmemiş

tesisle beraber kullanıldığında, tesisin kazancı, çoğunlukla $1/a$ teriminin etkisini azaltmak için artar. Sadece kutup ve sıfır çizimlerini düşünürsek, Bode çizimi Şekil 8.23'te gösterildiği gibidir.



Şekil 8.22 *Kompanizasyonu belirleme*

Fazın maksimum değeri $1/aT$ ve $1/T$ frekanslarının geometrik ortalaması ω_m için gerçekleşir. Ortalama frekans böylece aşağıdaki gibidir:

$$\lg \omega_m = \frac{1}{2} \left(\lg \frac{1}{aT} + \lg \frac{1}{T} \right)$$

ve bu nedenle:

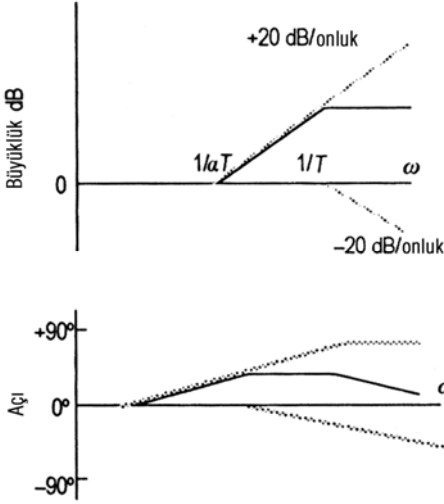
$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}} \quad [46]$$

Frekans tepkisi de aşağıdaki gibidir:

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + jaT\omega}{1 + jT\omega} \quad [47]$$

bu denklem de aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} G_c(j\omega) &= \frac{1}{1 + jT\omega} + \frac{jaT\omega}{1 + jT\omega} \\ &= \frac{1 + aT^2\omega^2}{1 + T^2\omega^2} + j \frac{aT\omega - T\omega}{1 + T^2\omega^2} \end{aligned}$$



Şekil 8.23 İlerletmeli bir kompensatör için Bode çizimi asimptotları

Kompensatörün fazı böylece aşağıda verildiği gibidir:

$$\tan \phi = \frac{\omega aT - \omega T}{1 + a\omega^2 T^2} \quad [48]$$

Denklem [46]'yı, denklem [48]'de yerine koyarsak maksimum faz ϕ_m elde edilir:

$$\tan \phi_m = \frac{a - 1}{2\sqrt{a}} \quad [49]$$

ϕ_m açısını dik açılı bir üçgenin, dikey $(a-1)$ ve yatay $2\sqrt{a}$ olmak üzere, açısı olarak düşünersek, hipotenüs, $(a-1)^2 + (2\sqrt{a})^2 = a+1$ 'in kare köküdür. Böylece:

$$\sin \phi_m = \frac{a-1}{a+1} \quad [50]$$

Böylece ϕ_m 'nin değerini belirleyerek, a 'nın değeri elde edilebilir, denklem [50] aşağıdaki ifadeyi verir:

$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} \quad [51]$$

İlerletme kompansatörünün büyüklüğü, $1 + aTs$ ve $1/(1 + Ts)$ elemanlarına bağlı bir toplamdır. Böylece:

$$\begin{aligned} & \text{dB cinsinden büyüklük} \\ &= 20 \lg \sqrt{1 + a^2 \omega^2 T^2} + 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ &= 20 \lg \sqrt{1 + a^2 \omega^2 T^2} - 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad [52] \end{aligned}$$

Bu, düşük frekanslarda birim büyüklüğünde, yüksek frekanslarda, $20 \lg a$ büyüklüğündedir.

Kompansatörü dizayn ederken, Bode çizim kullanılarak uygulanabilecek dizayn prosedürü aşağıdaki gibidir:

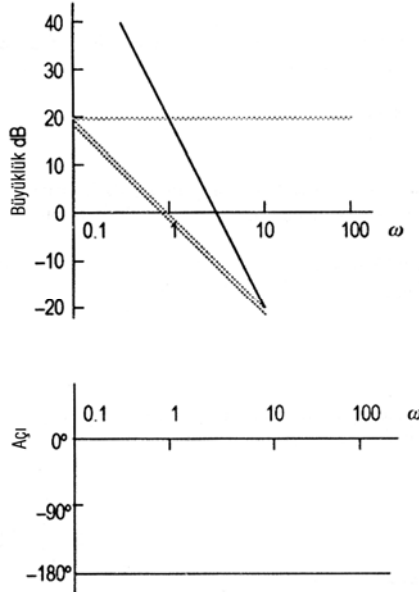
- 1 Kompanse edilmemiş tesis için, kararlı-hal hatası gereksinimi için gerekli değere ayarlanmış kazanç sabit K ile, Bode diyagramını oluşturun.
- 2 Bode çiziminden, kompanse edilmemiş sistemin faz marjini ve kazanç marjini belirleyin.
- 3 Bundan sonra, istenilen faz marjini ve bu nedenle ϕ_m 'yi gerçekleştirmek için gereken ek faz miktarını belirleyin.
- 4 a 'yı belirlemek için denklem [51]'i kullanın.
- 5 Yüksek frekans büyüklüğü $20 \lg a$ dB'dir ve düşük frekans büyüklüğü 0 dB'dir; ortalama $10 \lg a$ dB'dir. Yeni kazanç-geçiş frekansının, $1/aT$ ve $1/T$ frekanslarının geometrik ortası olan frekans olması için, kompanse edilmemiş tesisin büyüklüğünün $-10 \lg a$ dB olduğu frekansı tespit etmemiz gerekiyor. Bu nedenle, T 'yi belirleyin.

- 6 İlerletme kompensatörünün transfer fonksiyonu böylece a ve T değerleri kullanılarak bulunabilir.

Yukarıdaki prosedüre örnek olarak, kompanse edilmemiş, tesis transfer fonksiyonu $10/s^2$ olan birim geri beslemeli bir sistem düşünelim. Bu sistemin toplam transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$T(s) = \frac{10}{s^2 + 10}$$

Kutup konumları $\pm j\sqrt{10}$ 'dur ve böylece sistem marjinal olarak karardır ve sönümlenmemiş salınımlar verir. Faz marjini 45° 'yi verecek şekilde bir sönümleme faktörüne sahip sönümlenmiş bir sistem elde etmeye çalıştığımızı düşünelim. Şekil 8.24, bu sistemin kompanse edilmemiş Bode çizimini gösteriyor.



Şekil 8.24 *Kompense edilmemiş çizim*

Kompense edilmemiş sistemin faz marjini 0° 'dir. Gerekli faz marjini 45° 'dir. Böylece ilerletme kompensatörü ile geçiş

frekansında 45° eklenmelidir. Böylece, denklem [51] kullanılırsa aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = \frac{1 + 0.71}{1 - 0.71} = 5.9$$

Bir miktar güvenlik marjini sağlaması için, $a = 6$ değerini kullanacağız. Maksimum faz ilerlemesi, $1/aT$ ve $1/T$ frekanslarının geometrik ortalamasında gerçekleşir. Bu frekansta, tesisin büyüklüğü $-10 \lg a = -10 \lg 6 \text{ dB} = -7.8 \text{ dB}$ olmalıdır. Bode çizimini kullanırsak, bu büyüklük 4.9 rad/s 'de gerçekleşir. Böylece, denklem [46]'yı kullanarak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}$$

$$T = \frac{1}{4.9\sqrt{6}} = 0.083$$

İlerletme kompansatörü, böylece, aşağıdaki gibi bir transfer fonksiyonuna sahip olmalıdır:

$$\frac{1}{6} \frac{s + 0.498}{s + 0.0483}$$

Geciktirme ve ilerletme kompansatörlerinin etkileri

Geciktirme kompansatörünün sistem üzerindeki etkileri, aşağıda sıralanmıştır:

- 1 Verilen bir döngü kazancı için, kazanç-geçiş frekansı civarında, açık döngü transfer fonksiyonunun büyüklüğü azalır/zayıflar ve bu nedenle sistemin göreceli kararlılığı gelişir.
- 2 Kazanç-geçiş frekansı azalır ve böylece kapalı-döngü sistemin bant genişliği azalır.
- 3 Sönümleme faktörü azaltılabilir ve bu nedenle sistemin yükselme zamanı ve yerleşme zamanı uzatılabilir.

İlerletme kompansatörünün sistem üzerindeki etkileri aşağıda sıralanmıştır:

- 1 Açık-döngü transfer fonksiyonunun fazı, kazanç-geçiş frekansı civarında artar ve bu nedenle kapalı-döngü sistemin faz marjini gelişir.
- 2 Açık-döngü transfer fonksiyonunun büyüklük çiziminin eğimi, kazanç-geçiş frekansında azalır. Bu, çoğunlukla göreceli kararlılıkta bir gelişmeyle sonuçlanır.
- 3 Kapalı-döngü sistemin bant genişliği artar.
- 4 Sisteme bir adım girdisi olduğu zaman, yükselme miktarı ve yükselme zamanı azalır.
- 5 Kararlı-hal hatası etkilenmez.

Geciktirme-ilerletme kompensatörleri

Hem ilerletme, hem de geciktirme kompensatörlerinin özelliklerini elde etmek için, ilerletme ve geciktirme kompensatörlerinin bir kombinasyonu dizayn edilebilir; yani ilerletme kısmı, daha kısa bir yükselme zamanı elde etmek için ve geciktirme kısmı ise daha iyi bir sönümlleme elde etmek için. Bir ilerletme-geciktirme kompensatörünün transfer fonksiyonu, $a > 1$ ve $\beta < 1$ olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$G_c(s) = \left(\frac{1+aT_1s}{1+T_1s} \right) \left(\frac{1+\beta T_2s}{1+T_2s} \right) \quad [53]$$

İlk terim ilerletme elemanını sağlıyor ve ikinci terim geciktirme elemanını sağlıyor.

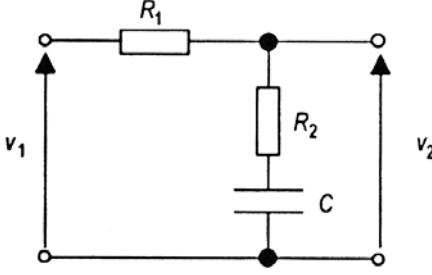
Kompensatörler için pasif devreler

Zaman bölgesindeki R resistansı için, $R = v(t)/i(t)$ 'dir. s -bölgesinde, bu denklem $R(s) = V(s)/I(s)$ 'e dönüşür. Zaman bölgesindeki C kapasitansı için, $i(t) = Cdv(t)/dt$ 'dir. s -bölgesinde, bu denklem, eğer $t = 0$ 'da $v = 0$ ise, $I(s) = CsV(s)$ 'e dönüşür. s -bölgesinde, kapasitörün empedansı $Z(s) = 1/Cs$ 'tir. Laplace dönüşümünün toplama özelliğinden dolayı, zaman bölgesindeki bir takım fonksiyonların toplamalarının dönüşümleri, her bir fonksiyonun dönüşümlerinin toplamına eşittir. Böylece, geciktirme kompensatörü için kullanılacak pasif bir elektrik devresi gösteren Şekil 8.25'i ele alırsak, bu devreyi s -bölgesinde potansiyel bölücü olarak düşünebiliriz ve bu nedenle çıktı, $V_2(s)$ ile seri R_2 empedansı ve C üzerindeki girdi voltajı $V_1(s)$ 'nin oranıdır:

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2 + 1/C_s}{R_1 + R_2 + 1/C_s}$$

ve bu nedenle devrenin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$G_c(s) = \frac{1 + R_2 C s}{1 + (R_1 + R_2) C s} \quad [54]$$



Şekil 8.25 Geciktirme kompensatörü

Eğer bunu, geciktirme kompensatörünün transfer fonksiyonu ile karşılaştıırırsak, $a < 1$ ile aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$aT = R_2 C \quad [55]$$

$$T = (R_1 + R_2) C \quad [56]$$

ve böylece:

$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad [57]$$

Şekil 8.26, ilerletme kompensatörü ile kullanılabilecek pasif bir elektrik devresini gösteriyor. s -bölgesinde, devreyi potansiyel bölücü olarak düşünürsek:

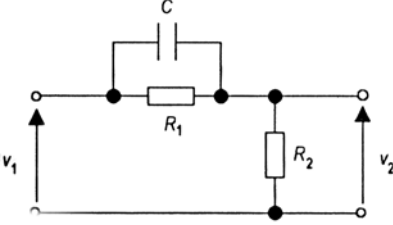
$$\begin{aligned} \frac{V_2(s)}{V_1(s)} &= \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1(1/C_s)}{R_1 + (1/sC)}} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_1 C_s + 1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_s + 1} \end{aligned}$$

Eğer:

$$a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \text{ ve } T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \quad [58]$$

ise a 1'den büyüktür ve bu devrenin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$G_c(s) = \frac{1}{a} \frac{(1 + aTs)}{(1 + Ts)} \quad [59]$$



Figür 9.26 İlerletmeli kompensatör

Şekil 8.26, ilerletme-geciktirme kompensatörü ile kullanılabilir pasif bir elektrik devresini gösteriyor. Devreyi potansiyel bölücü olarak düşünersek, s-bölgesinde:

$$\frac{V_1(s)}{V_2(s)} = \frac{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}{1 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

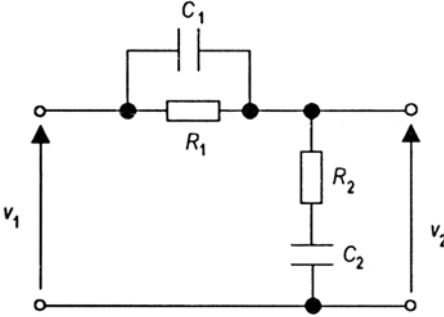
Eğer:

$$aT_1 = R_1 C_1, \beta T_2 = R_2 C_2 \text{ ve } T_1 T_2 = R_1 R_2 C_1 C_2 \quad [60]$$

ise bu devrenin transfer fonksiyonu, $a > 1$ ve $\beta < 1$ olmak üzere, aşağıdaki gibi olur:

$$G_c(s) = \frac{(1 + aT_1 s)(1 + \beta T_2 s)}{1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad [61]$$

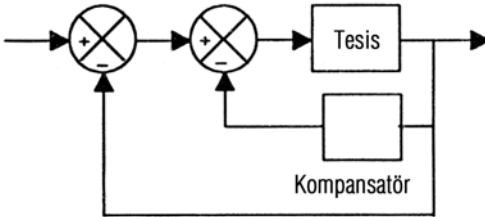
ve denklem [60]'tan, $aT_1 \beta T_2 = R_1 C_1 R_2 C_2 = T_1 T_2$ 'dir ve bu nedenle $a\beta = 1$ 'dir. bu son koşul a ve β 'nın birbirinden bağımsız olarak ifade edilemeyeceği anlamına geliyor.



Şekil 8.27 Geciktirme-ilerletme kompensatörü

Hız geri beslemesi

Bir önceki bölümde, geciktirme ve ilerletme kompensatörleri ile ilgili bütün varsayımlarımız, kompensatörlerin sistemlerde seri kompensatör olarak kullanımı ile ilgiliydi. Bir başka kompanzasyonun metodu kompensatörü geri besleme yolunda kullanmayı içerir. Şekil 8.28, bu tip bir düzenlemeyi gösteriyor. Bu tip bir sistemin yaygın uygulaması, hız geri beslemesi olarak tanımlanan, servo sistem kullanımıdır. Bunun anlamı, kompensatör transfer fonksiyonunun $G_p(s) = \beta s$ formunda olmasıdır. Bir tesisin, $G_p(s) = K/s(1 + Ts)$ transfer fonksiyonuna sahip olduğunu varsayalım. İleri yol bloğu $G_p(s)$ ve geri besleme bloğu $G_c(s)$ yerine, tek bir $G(s)$ bloğu konulabilir:



Şekil 8.28 Geri besleme kompanzasyonu

$$G(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)} = \frac{K}{s(1 + K\beta + sT)} \quad [62]$$

Kompanse edilmemiş sistem, bir rampa girdisine aşağıda belirtilen kararlı-hal hatasını verir (denklem [24], 5.bölüm):

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 [1 + G_p(s)]} = \frac{1}{K} \quad [63]$$

Kompanse edilmiş sistem, aşağıdaki kararlı-hal hatasını verir:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 [1 + G(s)]} = \frac{1 + K\beta}{K} \quad [64]$$

Böylece, hız geri beslemesi kullanımı kararlı-hal hatasını daha da kötüleştirdi.

Buna rağmen, hız geri beslemesinin bir faydası vardır. Bu, sistemin sönümlemesini geliştirir. Kapalı-döngü kompanse edilmemiş bir sistem, aşağıdaki gibi bir transfer fonksiyonuna sahiptir:

$$T(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)} \quad [65]$$

ve böylece bu fonksiyonun karakteristik denklemi aşağıdaki gibidir:

$$Ts^2 + s + K = 0 \quad [66]$$

Kapalı-döngü kompanse edilmiş bir sistem, aşağıdaki gibi bir transfer fonksiyonuna sahiptir:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad [67]$$

ve böylece bu fonksiyonun karakteristik denklemi aşağıdaki gibidir:

$$Ts^2 + (1 + T\beta)s + K = 0 \quad [68]$$

Denklem [66] ve [67], aşağıdaki denklem ile karşılaştırılırsa:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega^2 = 0$$

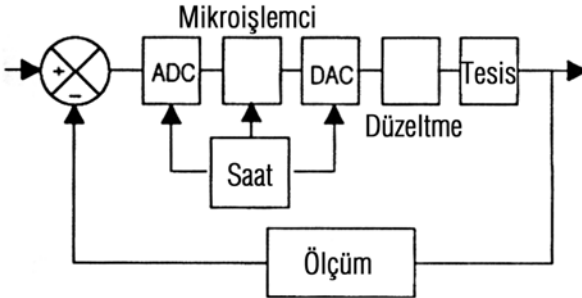
doğal frekansın etkilenmediği görülür fakat sönümleme bir $(1 + T\beta)/1$ faktörü kadar artar.

9. Ayırık zamanlı sistemler

Sistemler

Bir sürekli zamanlı sistem, sadece zamana bağlı sürekli sinyal içeren bir sistemdir; bu tip sinyaller, sürekli bir zaman aralığında tanımlanır. Bu tip sistemler, diferansiyel denklemlerle modellenebilir. Bir *ayırık zamanlı sistem (discrete time system)*, ayırık zaman sinyalleri içerir; bu tip sinyaller, sadece belirli anlar için tanımlıdır. Bu tip sistemler fark denklemleri ile modellenebilir.

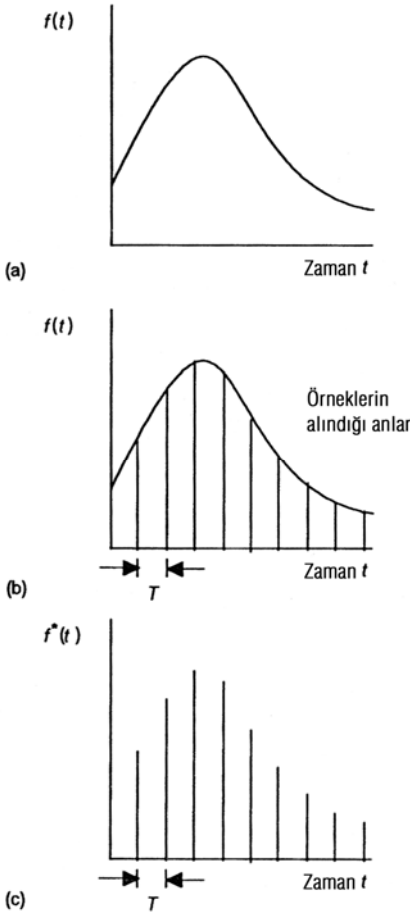
İşlemek için, ayırık sinyal elde etmede sürekli bir sinyali örnekleyen sistemler, örneklem-verili sistemler olarak tanımlanır. Şekil 9.1 bu tip bir sistemi gösteriyor. Sistem girdisi, sürekli bir zaman sinyalidir. Analog-dijital dönüştürücü (ADC) bu sinyali örnekler ve ayırık bir sinyal üretir. Mikroişlemci, bu ayırık sinyal girdisini alır ve bir takım kontrol kurallarına göre işlemden geçirdikten sonra, çıktı olarak başka bir ayırık sinyal olarak verir. Dijital-analog dönüştürücü (DAC) bu ayırık sinyali, sürekli bir zaman sinyaline dönüştürür. Daha sonra bu sinyal, tesisin kontrol değişkenini değiştiren düzeltme birimini harekete geçirir; geri besleme sürekli bir zaman sinyalidir.



Şekil 9.1 Örneklem-verili sistemler

Örnekleme verisi

Bir *analog sinyal* değerlerin sürekli aralığına sahiptir. sürekli bir analog zaman sinyali örneklendiği zaman, sonuçta elde edilen örnek ayırık bir zaman sinyali oluşturur. Örnek olarak, Şekil 9.2(a)'da, $f(t)$ ile tanımlanan sürekli zamanlı analog bir sinyali düşünün. Bu örnekleme periyodu T ile ayrılan eşit zaman aralıklarında örneklenmiştir (Şekil 9.2(b)). Örnekleme sinyali daha sonra ayırık zamanlı bir sinyal oluşturur (Ş.9.2(c)), bu $f^*(t)$ ile gösterilir.



Şekil 9.2 (a) Sürekli zaman sinyali, (b) örneklenen sinyal, (c) ayırık zamanlı sinyal veren örnekler

Örneklemenin çıktısı, böylece, T örnekleme periyodu olmak üzere $0, 1T, 2T, 3T, \dots, kT$ anlarında oluşan darbeler serisidir.

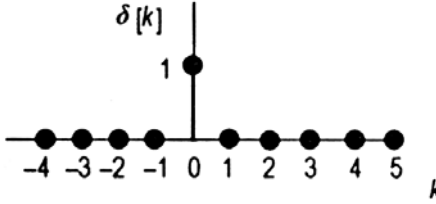
Ayrık zaman sinyali böylece $f(t)$ fonksiyonunun bu zamanlardaki değerleridir, yani $f(0), f(1T), f(2T), f(3T), \dots, f(kT)$. k darbe serisinde sinyalin numarasını belirten bir tam sayıdır. Bu seri $f[k]$ olarak gösterilebilir, [köşeli parantez], genelde sürekli bir değişken yerine bir ayrık değerler serisi ile ilgilenildiğini belirtmek için kullanılır.

Aşağıdakiler yaygın olarak karşılaşılan ayrık zamanlı sinyallerdir:

1 Birim darbe

Şekil 9.3, bir birim darbesi için seriyi gösteriyor. Birim darbe aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} k = 0 \text{ için } \delta[k] &= 1 \\ k \neq 0 \text{ için } \delta[k] &= 0 \end{aligned} \quad [1]$$

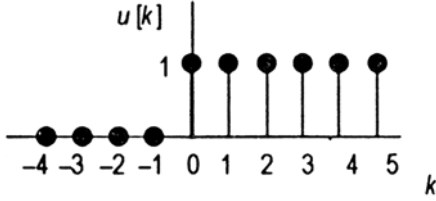


Şekil 9.3 Birim darbe

2 Birim adım

Şekil 9.4, bir birim adım için seriyi gösteriyor. Birim adım aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} k > 0 \text{ için } u[k] &= 1 \\ k < 0 \text{ için } u[k] &= 0 \end{aligned} \quad [2]$$

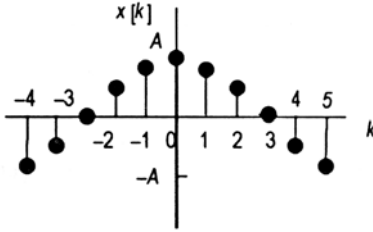


Şekil 9.4 Birim adım

3 Sinüzoidal seri

Şekil 9.5, bir sinüzoidal seri için olan seriyi gösteriyor. Sinüzoidal seri, A sinüzoidal serinin genliği, θ fazı ve f orijinal sinüzoidal analog sinyalin frekansının örnekleme frekansına bölümü olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x[k] = A \cos(2\pi f k + \theta) \text{ ya da } A \sin(2\pi f k + \theta) \quad [3]$$



Şekil 9.5 Sinüzoidal seri

Dijital sinyaller

Sadece sonlu sayıda bir dizi değere sahip ve sadece açıkça tanımlanan adımlarla değişen bir *dijital sinyal*, sayılabilir hake getirilir (nicelleştirilir). Bir ayrık sinyal *nicelleştirildiğinde*; sadece sonlu bir sayıda ebatlarda darbelere sahip dijital bir sinyal üretilir. Bu değerler, dijital sinyal değerini verecek şekilde, sonlu sayıda bit kullanılarak kodlanır (Şekil 9.6). Böylece 4-bit bir sistem için, bütün girdi aralığını kaplamak için maksimum $2^4=16$ tane farklı

nicelleştirme seviyesi vardır. Bu nicelleştirme seviyeleri arasında yer alan sinyaller, en yakın seviyeye yuvarlanarak kodlanır.



Şekil 9.6 Nicelleştirme/Kuantizasyon

Dijital sinyal işleme

Dijital sinyal işleme dijital serilerin işlenmesi ile ilgilendir. Bu tip bir işleme aşağıdaki matematik işlemlerini içerir.

1 Toplama ve çıkarma

İki dijital sinyalin toplama veya çıkarması, $y[k]$ iki dijital sinyalin örnek toplama ve çıkarma temeline dayalı toplamı veya farkı olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$y[k] = x_1[k] \pm x_2[k] \quad [4]$$

Örnek olarak, iki sinüzoidal seriyi düşünelim:

$$x_1[k] = +1.0, +0.3, -0.8, -0.8, +0.3, +1.0, +0.3, \dots$$

$$x_2[k] = +1.0, -0.8, +0.3, +0.3, -0.8, +1.0, -0.8, \dots$$

Toplam olarak elde edilen dijital sinyal aşağıdaki gibidir:

$$y[k] = +2.0, -0.5, -0.5, -0.5, -0.5, +2.0, -0.5, \dots$$

2 Ölçeklendirme

Bir dijital sinyalin ölçeklendirmesi, $y[k]$, $x[k]$ 'nin ölçeklendirilmiş hali ve a negatif veya pozitif olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$y[k] = ax[k] \quad [5]$$

Bir örnek olarak, aşağıdaki adım sinyalini düşünün.

$$u[k] = 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

ölçeklendirilmiş sinyal $0.5u[k]$ aşağıdaki gibidir:

$$0.5u[k] = 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, \dots$$

3 Zaman Kaydırması

Bir dijital sinyal serisinin zaman kaymaları, zamanda gecikme veya ilerleme olsun, $y[k \pm n]$, $y[k]$ 'nin $\pm n$ 'e eşit bir zaman aralığı kadar kaydırılmış hali olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$y[k] = y[k \pm n] \quad [6]$$

Bir örnek olarak, birim darbe sinyalini düşünelim:

$$\delta[k] = 1, 0, 0, 0, 0, \dots$$

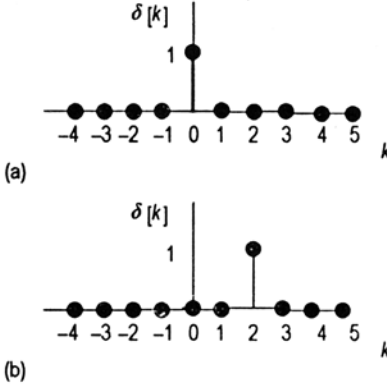
Eğer bu sinyali 2 ile geciktirirsek, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\delta[k-2] = 0, 0, 1, 0, 0, \dots$$

Şekil 9.7 yukarıdaki kavramı örnekliyor.

Zaman kayması sonucunda, bir birim adım serisini, bir birim darbe ve geciktirilmiş birim darbeler toplamı olarak görülebilir, yani:

$$\delta[k] = \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \delta[k-3] + \dots \quad [7]$$



Şekil 9.7 (a) $\delta[k]$, (b) $\delta[k-2]$

4 Çarpma

İki serinin çarpımı sonucu, iki girdi serisinin eleman-eleman çarpımı sonucu elde edilen bir çıktı serisi elde edilir. Bu, aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$y[k] = x_1[k] \times x_2[k] \quad [8]$$

Bir örnek olarak, aşağıdaki gibi iki serimiz varsa:

$$x_1[k] = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$x_2[k] = 0, 0, 1, 0, 0$$

çarpım aşağıdaki gibidir:

$$y[k] = 0, 0, 3, 0, 0, \dots$$

Fark denklemleri

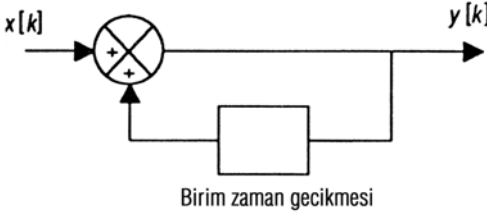
Bir ayrık zamanlı işleme sisteminde, darbeler serisi şeklinde bir girdi ve darbeler serisi şeklinde bir çıktı vardır. Özel bir andaki çıktı, sistemin, toplama, çıkarma, ölçeklendirme ve zaman kaydırma gibi matematik işlemleri kullanmasıyla hesaplanır.

Böylece, bir işlemci, $x[k]$ 'nin özel bir anında bir seriden girdi alabilir ve buna bir önceki çıktı değeri $y[k-1]$ ekleyerek işleyebilir. Bunun sonucunda, çıktı $y[k]$ aşağıdaki gibi olur:

$$y[k] = y[k-1] + x[k] \quad [9]$$

Bu tip bir denklem *fark denklemi* olarak tanımlanır. Bu denklem, prosesör sistemi için, girdi ve çıktı arasındaki ilişkiyi verir ve böylece bir sürekli zaman sisteminin girdi ve çıktısını ilişkilendiren diferansiyel denklemi ile karşılaştırılabilir.

Bu tip denklemler, zaman gecikmesi blokları, ölçeklendirme blokları ve sinyallerin nasıl birleştirildiğini gösteren özelliklere sahip blok diyagramları ile gösterilebilir. Şekil 9.8 denklem [8]'in blok diyagramını gösteriyor. Bu diyagram, bir geri besleme durumunu tanımlıyor.

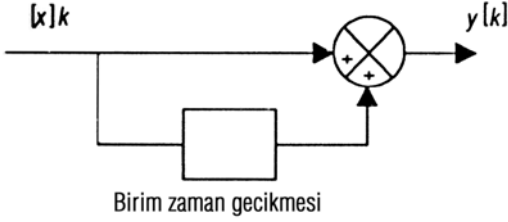


Şekil 9.8 $y[k] = y[k-1] + x[k]$

Daha ileri bir örnek için, Şekil 9.9 aşağıdaki fark denkleminin blok diyagramını gösteriyor:

$$y[k] = x[k] + x[k-1] \quad [10]$$

Çıktı, özel bir andaki girdi ve bir önceki girdinin toplamından oluşur ve bu ileri besleme durumunu açıklar.

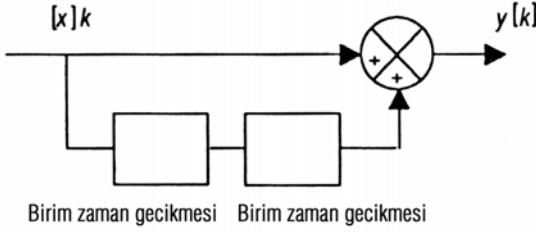


Şekil 9.9 $y[k] = x[k] + x[k-1]$

Şekil 9.10 aşağıdaki fark denkleminin blok diyagramını gösteriyor:

$$y[k] = x[k] + x[k-2] \quad [11]$$

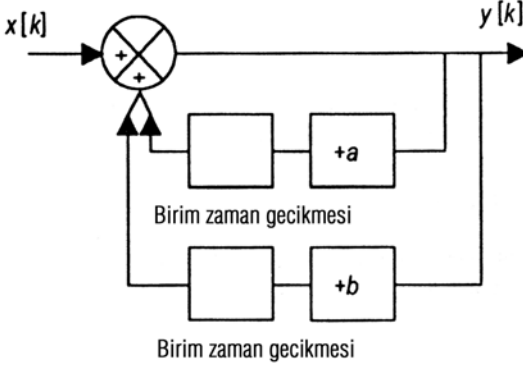
Çıktı, özel bir andaki girdi ve bir önceki girdinin 2 ile geciktirilmiş haliyle toplamından oluşur.



Şekil 9.10 $y[k] = x[k] + x[k-2]$

Şekil 9.11, ölçeklendirme faktörü ve iki tane geri besleme döngüsü içeren bir sistem için, aşağıdaki fark denklemini örnekliyor:

$$y[k] = x[k] + ay[k-1] + by[k-2] \quad [12]$$



Şekil 9.11 $y[k] = x[k] + ay[k-1] + by[k-2]$

Dijital sinyal işleme sistemlerinin özellikleri

Dijital sinyal işleme sistemlerini açıklamak için kullanılan fark denklemlerinin kullanımına ilişkin temel özellikler aşağıdaki gibidir:

1 Lineerlik

Eğer girdisi bir dizi sinyal içeren bir sistemin tepkisi her bir sinyal tek başına düşünüldüğünde elde edilen tepkilerin toplamına eşitse, bu sistem için lineerdir denir. Böylece eğer $y_1[k]$ ve $y_2[k]$ sistemin $x_1[k]$ ve $x_2[k]$ girdileri, ayrı ayrı düşünüldüğünde tepkiler ise, bu iki girdinin birlikte uygulanması sonucu $x_1[k] + x_2[k]$, elde edilen tepki $y_1[k] + y_2[k]$ 'dir.

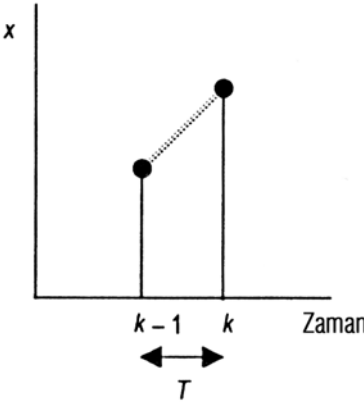
2 Kararlılık

Eğer herhangi bir büyüklükteki, herhangi bir girdi, sonlu büyüklükte bir çıktı sağlıyorsa; sistem için kararlıdır denir. Örnek olarak, $y[k] = a^k x[k]$ fark denklemi ile tanımlanan sistemi düşünün. Eğer a 1'den küçük veya 1'e eşitse, çıktındaki her iki terimde sonlu bir büyüklüktedir. Buna rağmen, eğer a 1'den büyükse, çıktı, k sonsuza giderken sonsuza doğru ıraksar. Böylece, sistemin kararlı olabilmesi için, $a \leq 1$ olmalıdır.

Türev ve integral yakınsamaları

Bir fonksiyonun türevi iki ardışık girdiyi bağlayan çizginin gradyanı belirlenerek yakınsanabilir (Şekil 9.12). Böylece, T örneklem periyodu ile, $x[k-1]$ ve $x[k]$ girdileri için, zamana göre türevi belirten, çıktı $y[k]$ aşağıdaki gibidir:

$$y[k] = \frac{x[k] - x[k-1]}{T} \quad [13]$$



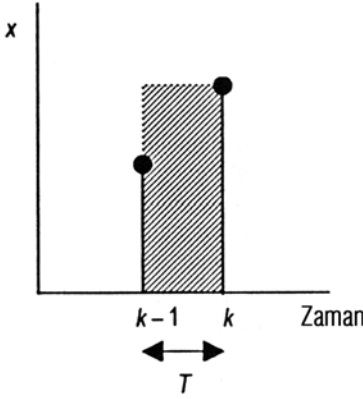
Şekil 9.12 Türevin yakınsaması

Bir fonksiyonun integrali, girdinin zamana bağlı grafiğinin altındaki alan bulunarak yakınsanabilir. Şekil 9.13, bir örnekleme periyodundaki sinyal değişimini sonunda oluşan alanı yakınsamanın bir yolunu gösteriyor ve bu genişliği T ve yüksekliği $x[k]$ olan bir dikdörtgendir, yani örnekleme periyodu ile sinyalin en son değerinin çarpımıdır:

$$\text{alan artışı} = Tx[k]$$

Alan artışı, çıktıdaki $y[k-1]$ 'den $y[k]$ 'ya değişimdir ve bu nedenle integrali belirten çıktı aşağıdaki gibidir:

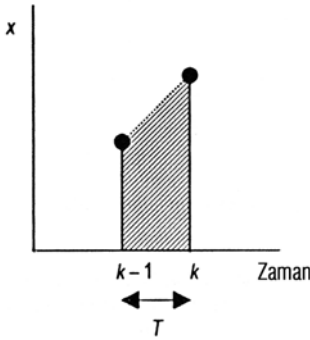
$$y[k] = y[k-1] + Tx[k] \quad [14]$$



Şekil 9.13 *İntegralin dikdörtgensel yakınsaması*

Daha kesin bir alan hesaplama: alanın bir trapezoide yakınsayarak elde edilebilir:

$$\text{alan artışı} = \frac{1}{2} T (x[k-1] + x[k])$$



Şekil 9.14 *İntegralin trapezoid yakınsaması*

ve bu nedenle:

$$y[k] = y[k-1] + \frac{1}{2} T (x[k-1] + x[k]) \quad [15]$$

Bu yakınsama Tustin yakınsaması olarak bilinir.

Analog kontrol kurallarının çevrimi

Bir analog kontrol kuralını, dijital kontrolörün kullanabileceği bir forma getirmek için tercüme edilmesinde, analog kontrolörün transfer fonksiyonuna yakınsayan bir algoritma bulmamız gerekiyor; dijital kontrolörün yazılımındaki talimatlar biçiminde yazılan bir dizi matematik işlem setinden oluşan bir *algoritma olmalıdır, bu*.

Orantılı kontrolü düşünelim; kontrolör çıktısı $y[k]$ girdisiyle orantılıdır. Bu sistem için fark denklemi böylece, e hata ve K orantı sabiti olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$y[k] = Ke[k] \quad [16]$$

Program elemanları böylece aşağıdaki gibidir:

Başlangıç

$e[k]$ 'nin ilk değerini ayarla

K değerini ayarla

Döngü

Hata e 'yi gir

Denklem [16]'yı kullanarak çıktıyı hesapla

Hesaplanan çıktı değerini çıkart

Örnekleme periyodunun sonunu bekle

Döngüye git

İntegral kontrolü için, denklem [14]'ü kullanabiliriz ve bu nedenle:

$$y[k] = y[k-1] + K_i T e[k] \quad [17]$$

Program elemanları böylece aşağıdaki gibidir:

Başlangıç

$e[k]$ 'nin ilk değerini ayarla

$y[k-1]$ 'in ilk değerini ayarla

K_i değerini ayarla

T değerini ayarla

Döngü

Hata e 'yi gir

Denklem [17]'yi kullanarak çıktıyı hesapla

Hesaplanan çıktı değerini çıkart

$y[k-1]$ 'i $y[k]$ 'ya ayarla

Örnekleme periyodunun sonunu bekle

Döngüye git

Alternatif olarak integral kontrolü için, dikdörtgensel yakınsama yerine Tustin'in yakınsamasını kullanabilirdik.

Türev kontrolü için, denklem [13]'ü kullanırsak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$Ty[k] = K_d(e[k] - e[k-1]) \quad [18]$$

Program elemanları böylece aşağıdaki gibi olur:

Başlangıç

$e[k]$ 'nin ilk değerini ayarla
 $e[k-1]$ 'in ilk değerini ayarla
 K_d değerini ayarla
 T değerini ayarla

Döngü

Hata e 'yi gir
Denklem [18]'yi kullanarak çıktıyı hesapla
Hesaplanan çıktı değerini çıkart
 $e[k-1]$ 'i $e[k]$ 'ya ayarla
Örnekleme periyodunun sonunu bekle

Döngüye git

PID kontrolü için, denklem [16], [17] ve [18]'i kullanırsak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$y[k] = K_p e[k] + K_i T e[k] + y[k-1] + \frac{K_d}{T} (e[k] + e[k-1]) \quad [19]$$

Program elemanları böylece aşağıdaki gibi olur:

Başlangıç

$e[k]$ 'nin ilk değerini ayarla
 $e[k-1]$ 'in ilk değerini ayarla
 $y[k-1]$ 'in ilk değerini ayarla
 K_p değerini ayarla
 K_i değerini ayarla
 K_d değerini ayarla
 T değerini ayarla

Döngü

Hata e 'yi gir
Denklem [17]'yi kullanarak çıktıyı hesapla
Hesaplanan çıktı değerini çıkart
 $y[k-1]$ 'i $y[k]$ 'ya ayarla
 $e[k-1]$ 'i $e[k]$ 'ya ayarla
Örnekleme periyodunun sonunu bekle
Döngüye git

Daha ileri bir örnek için, aşağıdaki denklemle tanımlanan bir kompansatör düşünün:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1 + a\tau s}{1 + \tau s} \quad [20]$$

Çıktı $y(t)$ ve girdi $x(t)$ 'yi ilişkilendiren diferansiyel denklemi böylece aşağıdaki gibidir:

$$y(t) + \tau \frac{dy(t)}{dt} = x(t) + a\tau \frac{dx(t)}{dt} \quad [21]$$

Her bir sürekli zaman sinyalini kendi ayrık eşdeğeriyle yer değiştirirsek ve denklem [13]'te verilen türevin yakınsamasını kullanırsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

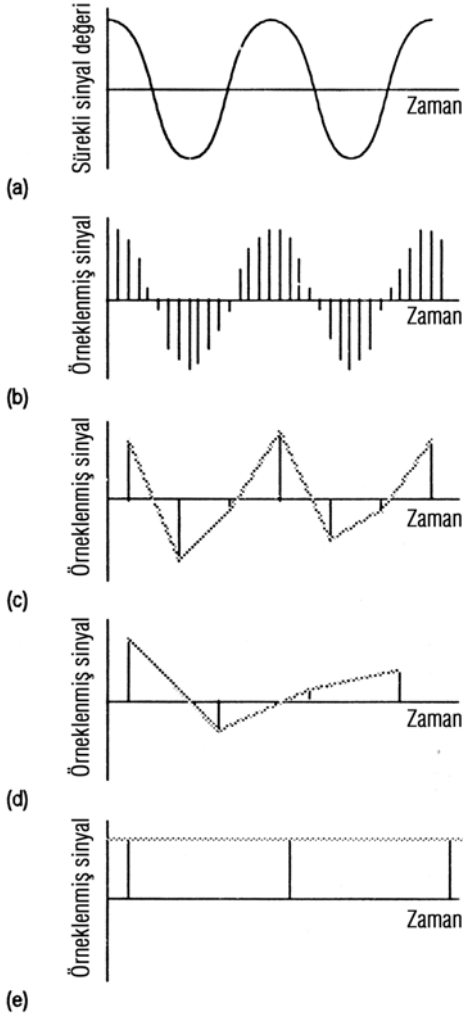
$$y[k] + \tau \frac{y[k] - y[k-1]}{T} = x[k] + a\tau \frac{x[k] - x[k-1]}{T}$$

Bunun sonucunda, bu denklem yeniden düzenlenirse, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$(T + \tau)y[k] = \tau y[k-1] + (T + a\tau)x[k] - a\tau x[k-1] \quad [22]$$

Örnekleme teoremi

Sürekli bir zaman sinyalini örneklediğimiz zaman, örnekleme periyodu sürekli sinyalin bilgi içeriği yeterince korunmalıdır, böylece, ayrık örneklerden sürekli sinyali tekrar oluşturduğumuzda çıktı hakkında bir belirsizlik oluşmamalı ve orijinal sinyali elde etmeliyiz.



Şekil 9.15 (a) Örneklelenen sinüs dalgası, (b) sinüs dalga frekansından daha büyük bir örnekleme frekansı, (c) sinüs dalga frekansına yakın örnekleme frekansı, (d) sinüs dalga frekansına daha da yakın örnekleme frekansı, (e) sinüs dalga frekansına eşit örnekleme frekansı

Şekil 9.15, farklı örnekleme hızlarında örneklenmiş sinüs dalgasını gösteriyor. (b)'de elde edilen örnekler, örnekleme frekansı sinüs dalga frekansından küçük olduğu zaman, sadece orijinal sinüs sinyali tamamen belirlenebilir. örnekleme hızı, sinüs dalga frekansına yakınsadığı zaman (Şekil 9.15(c)), daha fazla bilgi kaybediliyor ve belirsizlik ayrık örnekler tarafından belirtilen sinüs dalga frekansına kayabilir; bu örneklerden birden fazla frekans sinyali elde edilebilir. Bu, *aliasing*(üst üste binme) olarak adlandırılır. Örnekleme frekansı, sinüs dalga frekansına eşit olduğu zaman (Şekil 9.15(e)), çok daha fazla bilgi kaybedileceğinden, sinyal, bir sinüs dalgası olarak algılanamayabilir ve sabit genlikli bir sinyal olabilir. Bu sebeple, sürekli bir sinyal içinde varolan bütün frekansların örneklenmiş versiyonunda düzenli biçimde bulunması isteniyorsa, örnekleme hızı için bir alt sınır vardır. Örnekleme hızı için olan bu alt limit, *örnekleme teoremi* ile verilir:

Eğer, sürekli bir sinyal içinde varolan frekans bileşenleri 0 ile B Hz arasında değişiyorsa; örnekleme frekansı, saniye başına 2B adet örneği geçtiği müddetçe, sinyal, tamamen, bir örnekler dizisi olarak temsil edilebilir.

Sıfır-derece tutulum

Bir dijital kontrolörün çıktısı, ayrık zamanlı bir sinyaldir; bu tip bir sinyal sadece belirli anlarda değerlere sahiptir ve bu anlar arasında sıfırdır. Buna rağmen, çalıştırıcıyı veya dijital-analog dönüştürücüyü işletmenin daha etkili bir yolu, ayrık çıktı değerini örnekleme aralığı süresince sabit tutmaktır (Şekil 9.16). Çıktıyı yakalayan ve tutan eleman *sıfır-derece tutulum* (hold) olarak tanımlanır. Sıfır-derece terimi, elemanın sadece çıktı değerini değişim hızını almadan yakalamasından dolayı kullanılır.

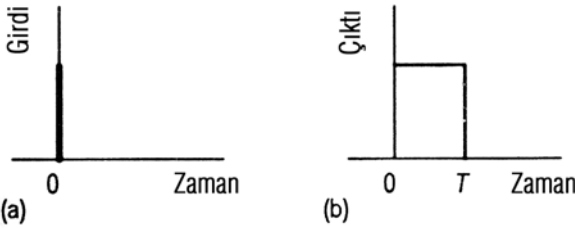
Sıfır-derece tutulum (ZOH) ile, bu elemana verilen bir birim darbe girdisi, aynı yükseklikte fakat örnekleme periyoduna eşit genişliğe sahip bir darbe olarak çıkar



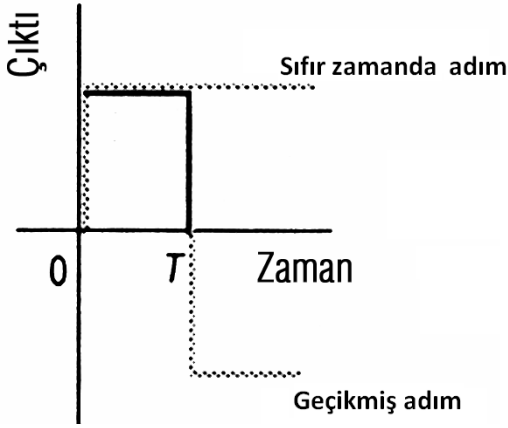
Figür 10.16 Örnekleme periyodu için sabit tutma

(Şekil 9.17). Girdinin Laplace dönüşümü 1'dir. Çıktının Laplace dönüşümü, bunun, bir tanesi T 'de başlamak üzere (Şekil 9.18), iki tane adım sinyalinin toplamı olduğu varsayılarak elde edilir. $t = 0$ 'da başlayan bir birim adımın Laplace dönüşümü $1/s$ 'dir. T ile geciktirilmiş bir adımın Laplace dönüşümü, adım dönüşümünün e^{-Ts} ile çarpımı anlamına gelir. Böylece ZOH'un çıkışı aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$



Şekil 9.17 ZOH'un (a)girdi ve (b) çıkışı



Figür 10.18 İki adımın toplamı olan dikdörtgensel darbe

ZOH'un transfer fonksiyonu böylece aşağıdaki gibidir:

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad [23]$$

10. Z-dönüşümü

Zaman gecikmesi

Laplace dönüşümü, sürekli zaman fonksiyonlarını, yeni değişkeni s olan bir fonksiyona dönüştürmek için; z -dönüşümü ise, ayrık zaman fonksiyonlarını, yeni değişkeni z olan bir fonksiyona dönüştürmek için kullanılır. Z-Dönüşümünü ayrık zamanlı sistemlere uygularken, basitçe, zaman gecikmelerinin ayrık zamanlı bir sinyalle oluştuğunu varsayabiliriz.

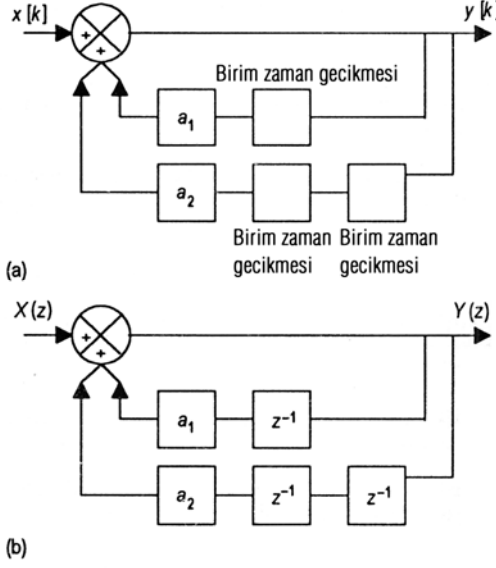
Temel olarak, bir ayrık zamanlı sinyalin, z^{-1} ile çarpımını, bir zaman adımı geciktirmeyi belirtmek için kullanabiliriz. Böylece, eğer aşağıdaki fark denklemini düşünürsek:

$$y[k] = a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] + a_3 y[k-3] + \dots \\ + b_0 x[k] + b_1 x[k-1] + b_2 x[k-2] + b_3 x[k-3] + \dots \quad [1]$$

Sinyalleri z -bölgmesine dönüştürdüğümüz zaman, aşağıdakileri elde ederiz:

- 1 $y[k]$ gecikmesi olmayan bir çıktıdır ve dönüşümü $Y(z)$ 'dir.
- 2 $a_1 y[k-1]$, çıktı $y[k]$ ile bir sabitin çarpılıp bir örnek periyodu geciktirilmesi ile elde edilir. Bunun dönüşümü $a_1 z^{-1} Y(z)$ 'dir.
- 3 $a_2 y[k-2]$, çıktı ile bir sabitin çarpılıp iki örnek periyodu geciktirilmesi ile elde edilir. Bunun dönüşümü $a_2 z^{-2} Y(z)$ 'dir.
- 4 $a_3 y[k-3]$, çıktı ile bir sabitin çarpılıp üç örnek periyodu geciktirilmesi ile elde edilir. Bunun dönüşümü $a_3 z^{-3} Y(z)$ 'dir.
- 5 $x[k]$ gecikmesiz bir girdidir ve dönüşümü $X(z)$ 'dir.
- 6 $b_1 x[k-1]$, girdi $x[k]$ ile bir sabitin çarpılıp bir örnek periyodu geciktirilmesi ile elde edilir. Bunun dönüşümü $b_1 z^{-1} X(z)$ 'dir.
- 7 $b_2 x[k-2]$, girdi ile bir sabitin çarpılıp iki örnek periyodu geciktirilmesi ile elde edilir. Bunun dönüşümü $b_2 z^{-2} X(z)$ 'dir.

8 $b_3x[k-3]$, girdi ile bir sabitin çarpılıp üç örnek periyodu geciktirilmesi ile elde edilir. Bunun dönüşümü $b_3z^{-3}X(z)$ 'dir.



Şekil 10.1 (a) zaman bölgesinde, (b) z-bölgesinde sistem

Böylece, denklem [1] z-bölgesine aşağıdaki gibi dönüştürülür:

$$y[k] = a_1z^{-1}Y(z) + a_2z^{-2}Y(z) + a_3z^{-3}Y(z) + \dots + b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) + b_2z^{-2}X(z) + b_3z^{-3}X(z) + \dots \quad [2]$$

Bu denklem, $G(z)$ darbe transfer fonksiyonu olarak tanımlanmak üzere, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + \dots}{1 - a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + \dots} \quad [3]$$

Konvansiyonel kullanıma göre, ayrık zamanlı fonksiyonları küçük harfle ve z fonksiyonları büyük harfle yazılır.

Örnek olarak, Şekil 10.1(a) zaman bölgesinde aşağıdaki fark denklemi ile tanımlanan bir sistemin blok diyagramını gösteriyor:

$$y[k] = x[k] + a_1y[k-1] + a_2y[k-2] \quad [4]$$

ve Şekil 10.1(b) aynı sistemi z-bölgesinde gösteriyor:

$$y[z] = X[z] + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) \quad [5]$$

Sistemin darbe transfer fonksiyonu böylece, aşağıdaki gibidir:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad [6]$$

Z-dönüşümünün örnekleme

Bir sürekli zaman fonksiyonunu örneklediğimizi düşünelim. Sonuç bir dizi darbe serisidir ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$f^*(t) = f[0]\delta(t) + f[1]\delta(t - T) + f[2]\delta(t - 2T) \\ + f[3]\delta(t - 3T) + \dots + f[k]\delta(t - kT) \quad [7]$$

Yukarıdaki denklemi elde etmenin bir başka alternatifinin, örneklenmiş sürekli zaman fonksiyonunun, sürekli bir zaman fonksiyonu ile bir dizi birim darbenin çarpımı olduğunu düşünmek olduğunu; yani $f^*(t) = f(t)x\delta(t)$ (Bölüm 9'a bakınız) olduğunu hesaba katın. $t = 0$ 'da, bir darbenin Laplace dönüşümü 1'dir, $1T$ 'de e^{-Ts} 'tir, $2T$ 'de e^{-2Ts} 'tir, $3T$ 'de e^{-3Ts} 'tir, v.b... Böylece örneklenmiş bir fonksiyon $f^*(t)$ 'nin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = f[0] + f[1]e^{-Ts} + f[2]e^{-2Ts} \\ + f[3]e^{-3Ts} + \dots + f[k]e^{-kTs} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} f[k]e^{-kTs} \quad [8]$$

Eğer

$$z = e^{Ts} \quad [9]$$

ise, yani $s = (1/T) \ln z$ ise, denklem [8] aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$z\{f^*(t)\} = F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} \\ + f[3]z^{-3} + \dots + f[k]z^{-k} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k} \quad [10]$$

$F^*(s)$, $s = (1/T) \ln z$ ile, darbeler serisinin z -dönüşümü olarak tanımlanır ve $z\{f^*(t)\} = F(z)$ olarak yazılabilir.

Yaygın sinyaller için z -dönüşümü

Aşağıda, yaygın olarak kullanılan iki sinyalin z -dönüşümünün nasıl elde edildiğini gösteriliyor:

1 Örneklenmiş birim adım

Örneklenmiş bir birim adımı düşünün; 0'dan büyük olan bütün t değerleri için $f^*(t)=1$ veya $f[k]=1$ 'dir. Böylece, denklem [10] kullanılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} F(z) &= f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + f[3]z^{-3} + \dots \\ &= 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \dots \end{aligned} \quad [11]$$

Bu seriyi *kapalı formda* ifade edebiliriz. Denklem [11], sonsuza giden $1 + x + x^2 + \dots$ formunda bir geometrik seri olduğundan, serinin $1/(1 - x)$ 'e yakınsaması koşuluyla (yani $|x| < 1$), eğer $1/z$ 'yi x olarak alırsak, $|z| > 1$ olmak üzere, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$F(z) = \frac{1}{1 - (1/z)} = \frac{z}{z - 1} \quad [12]$$

2 Örneklenmiş birim rampa

Bir T periyodu ile örneklendiğinde rampa fonksiyonu $f(t)=t$ 'yi düşünün. Denklem [10], aşağıdaki ifadeyi verir:

$$\begin{aligned} F(z) &= f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + f[3]z^{-3} + \dots \\ &= 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots \end{aligned}$$

Bu denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{zF(z)}{T} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots \quad [13]$$

Bilineer teorem $(1 - x)^{-2}$ 'ye uygulandığı zaman $1 + 2x + 3x^2 + \dots$ serisini elde ederiz. Bunun sonucunda, $|z| > 1$ olmak koşuluyla, denklem [13], aşağıdaki ifadeyi verir:

$$\frac{zF(z)}{T} = \frac{1}{(1-1/z)^2}$$

ve bu nedenle:

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad [14]$$

Ayrık zaman sinyalleri

Örneklenen sürekli zaman fonksiyonu yerine, düzenli aralıklı darbe serisi cinsinden tanımlanmış ayrık zamanlı bir sinyalin z -dönüşümünü düşünelim. $f[k] = 1$ serisini düşünün, yani 1, 1, 1, 1, 1, ... bu birim darbelerden oluşmuş bir seridir ve bu nedenle z -dönüşümü darbe serisinin dönüşümlerinin toplamı olduğundan, denklem [10] aşağıdaki ifadeyi verir:

$$\begin{aligned} F(z) &= f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + f[3]z^{-3} + \dots \\ &= 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \dots \end{aligned} \quad [15]$$

Daha önce olduğu gibi, seriyi *kapalı-form*'da ifade edebiliriz. Denklem [15] $1 + x + x^2 + \dots$ formunda, serinin $1/(1 - x)$ 'e yakınsaması koşuluyla (yani $|x| < 1$) sonsuz toplamına sahip bir geometrik seridir. Böylece, eğer x yerine $1/z$ yazılırsa, $|z| > 1$ olmak koşuluyla, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$F(z) = \frac{1}{1-(1/z)} = \frac{z}{z-1} \quad [16]$$

Anlaşıldığı üzere, yukarıdaki denklem, örneklenmiş birim adımda olduğu gibi, aynı ayrık zamanlı seriyi tanımlıyor.

Buna rağmen, elimizde 1, 1, 1, 1, 1, ... yerine, 0, 1, 1, 1, 1, ... serisi olduğunu düşünün, bunun z -dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} F(z) &= f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + f[3]z^{-3} + \dots \\ &= 0z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \dots \end{aligned} \quad [17]$$

Bu 1, 1, 1, 1, 1, ... serisi z -dönüşümünün sadece z^{-1} ile çarpımıdır. Böylece, 0, 1, 1, 1, 1, ..., 1, 1, 1, 1, 1, ... serisinin bir örnekleme periyodu geciktirilmiş hali olduğundan, z^{-1} ile çarpmak, bir örnekleme periyodu gecikmeyi belirtir.

Eğer elimizde 0, 0, 1, 1, 1, 1, ... serisi olsaydı, z -dönüşümü aşağıdaki gibi olacaktı:

$$F(z) = 0z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \dots \quad [18]$$

Böylece, bu, 1, 1, 1, 1, 1, ... serisinin z -dönüşümünün z^{-2} ile çarpımıdır ve bu nedenle çarpım iki örnekleme periyodu gecikmeyi belirtir.

Daha ileri bir örnek için, a^0, a^1, a^2, a^3 serisini veren ayrık zamanlı sinyalin z -dönüşümünü düşünün, yani a bir sabit olmak üzere, $f[k] = a^k$. z -dönüşümü, darbe serisinin dönüşümlerinin toplamıdır. Böylece, denklem [10] aşağıdaki denklemi verir:

$$\begin{aligned} F(z) &= f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + f[3]z^{-3} + \dots \\ &= a^0 + a^1z^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \dots \end{aligned} \quad [19]$$

Kapalı bir formda, denklem [19], toplamı sonsuz olan, $1 + ax + a^2x^2 + \dots$ formunda, serinin $1/(1 - ax)$ 'e yakınsaması koşuluyla (yani $|x| < 1$) bir geometrik seri olduğundan, eğer x yerine $1/z$ yazarsak, $|z| > a$ olmak üzere, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$F(z) = \frac{1}{1 - a(1/z)} = \frac{z}{z - a} \quad [20]$$

Standart z -dönüşümleri

Tablo 10.1 ve 10.2 yaygın olarak kullanılan örneklenmiş zaman fonksiyonları ve serilerinin z -dönüşümlerini verirken; Tablo 10.3 özel Laplace dönüşümlerine ilişkin z -dönüşümlerini veriyor.

Tablo 11.1 z -dönüşümleri

Örneklenmiş fonksiyon $f(t)$	$F(z)$	Örnekleme periyodu T
Birim darbe, $\delta(t)$	1	
kT ile geciktirilmiş birim darbe	z^{-k}	
Birim adım, $u(t)$	$\frac{z}{z-1}$	
kT ile geciktirilmiş birim adım	$\frac{z}{z^k(z-1)}$	
Birim rampa, t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	

t^2	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
te^{-aT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$
$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 + 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega T$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos \omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$

Tablo 11.2 z -dönüşümleri

$f[k]$	$f[0], f[1], f[2], f[3], \dots$	$F(z)$
$1u[k]$	$1, 1, 1, 1, \dots$	$\frac{z}{z-1}$
a^k	$a^0, a^1, a^2, a^3, \dots$	$\frac{z}{z-a}$
k	$0, 1, 2, 3, \dots$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
ka^k	$0, a^1, 2a^2, 3a^3, \dots$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
ka^{k-1}	$0, a^0, 2a^1, 3a^2, \dots$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
e^{-ak}	$e^0, e^{-a}, e^{-2a}, e^{-3a}, \dots$	$\frac{z}{(z-e^{-a})}$

Table 11.3 *Laplace and z -dönüşüm çiftleri*

Laplace dönüşümü ilgili z -dönüşümü

$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$

$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{(b-a)z^2 - (e^{-aT}b - e^{-bT}a)z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{z \sin aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{z^2 - z \cos aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$\frac{z(z-e^{-aT}-aTe^{-aT})}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{1}{s-(\ln a)/T}$	$\frac{z}{z-a}$
e^{-ksT}	z^{-k}

Z-dönüşümünün özellikleri

z-dönüşümünün temel özellikleri, aşağıdaki gibidir:

1 Toplama ve çıkarma

İki seri $f[k]$ ve $g[k]$ serilerinin toplamının z-dönüşümleri, serilerin tek başına z-dönüşümlerinin toplamıdır:

$$Z\{f[k] + g[k]\} = Z\{f[k]\} + Z\{g[k]\} \quad [21]$$

Örnek olarak, örneklenmiş fonksiyon $f^*(t) = t + e^{-t}$ 'nin, her 1 s'de örneklediği zamanki z-dönüşümünü düşünün. z-dönüşümü iki

fonksiyonun ayrı olarak düşünüldüğündeki z -dönüşümlerinin toplamına eşittir. Tablo 11.1'i, $T = 1$ s için kullanırsak, örneklenmiş fonksiyon t 'nin z -dönüşümü $Tz/(z-1)^2$ 'dir ve örneklenmiş e^{-t} 'ninki $z/(z-e^{-T})$ 'dir ve bu nedenle:

$$z\{\text{örneklenen}(t + e^{-t})\} = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-1}}$$

2 Bir sabit ile çarpma

Bir a sabiti ile çarpılan bir dizinin z -dönüşümü serinin z -dönüşümünü bu sabitle çarpmakla aynıdır:

$$z\{af[k]\} = aZ\{f[k]\} \quad [22]$$

Böylece, örneklenmiş birim rampa fonksiyonunu t 'nin z -dönüşümü $Tz/(z-1)^2$ olduğundan (Tablo 11.1), $2t$ 'nin z -dönüşümü $2Tz/(z-1)^2$ 'dir.

3 Kaydırma teoremleri(zaman gecikmesi)

Eğer $f[k]$ bir dizi ve $F(z)$ bunun z -dönüşümü ise, bu serinin n aralık ilerlemesiyle oluşan serinin z -dönüşümü, yani $f[k+n]$ 'i vermesi için sola kaydırılması, aşağıdaki denklemi verir:

$$z\{f[k+n]\} = z^n F(z) - (z^n f[0] + z^{n-1} f[1] + z^{n-2} f[2] + \dots + z f[n-1]) \quad [23]$$

Eğer $n = 1$ ise:

$$z\{f[k+1]\} = zF(z) - zf[0] \quad [24]$$

Eğer $n = 2$ ise:

$$z\{f[k+2]\} = z^2 F(z) - z^2 f[0] - zf[1] \quad [25]$$

Bir seriyi n ile ilerletmek, $F(z)$ ilerletmeden önceki serinin z -dönüşümü olmak üzere, $z^n F(z)$ tarzında bir z -dönüşümü verir. Yukarıdaki denklemlerdeki diğer terimler, Laplace dönüşümünde olduğu gibi, z -dönüşümünün sadece $k \geq 0$ için tanımlı olmasındandır ve bunlar sola kaydırıldıktan sonra kaybolan terimlerdir.

Eğer örneklenmiş bir fonksiyon $f(t)u(t)$, sağa kaydırılırsa, yani n örnek periyodu geciktirilirse, kaydırılmış örnekleme serinin z -dönüşümü, aşağıdaki gibidir:

$$z\{f[k-n]u[k-n]\} = z^{-n}F(z) \quad [26]$$

Kaydırma teoremleri, z 'yi *zaman kaydırma operatörü* olarak düşünebileceğimizi belirtir. z ile çarpmak, zamanda bir örnekleme periyodu ilerletme ile eşdeğerdir; z ile bölmek, zamanda bir örnekleme periyodu geciktirme ile eşdeğerdir.

Örnek olarak, ayrık zaman serisi $0, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 'nin z -dönüşümünü düşünün. $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 'nin bir zaman aralığı kadar geciktirilmiş hali olarak düşünülebilir. Tablo 10.2'de belirtildiği gibi, geciktirilmemiş sinyal $z/(z-1)^2$ z -dönüşümüne sahiptir ve böylece, yukarıdaki kaydırma teoremi kullanılırsa, geciktirilmiş seri $z^{-1}z/(z-1)^2 = 1/(z-1)^2$ olan z -dönüşümüne sahiptir.

4 Kompleks dönüşüm

Örneklenmiş bir $f^*(t)$ fonksiyonunun z -dönüşümü, e^{-at} ile çarpıldığında, $F(z)$ 'nin, $f[k]$ 'nin z -dönüşümü olması koşuluyla, örneklenmiş $f^*(t)$ fonksiyonundaki z yerine ze^{-aT} yazmayı içerir, yani:

$$z\{e^{-at}f[k]\} = F(ze^{-aT}z) \quad [27]$$

Örnek olarak, örneklenmiş fonksiyon $f^*(t) = te^{-at}$ 'nin z -dönüşümünü düşünelim. Kompleks dönüşüm özelliğini kullanarak ve bu nedenle t 'nin dönüşümündeki z yerine ze^{aT} yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{Tze^{aT}}{(ze^{aT}-1)} = \frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$$

5 İlk değer teoremi

İlk değer teoremi, $t = 0$ için, zaman fonksiyonunun değerini verir, yani ilk değeri. Bu teorem aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f[0] = \lim_{t \rightarrow 0} f[k] = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad [28]$$

Örnek olarak, z -dönüşümü $F(z) = z^2/(z - 1)(z - 0.5)$ olan bir serinin ilk değerlerini düşünün. z -dönüşümünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{1}{1 - 1.5/z + 0.5/z^2}$$

Daha sonra ilk değer teoremini kullanarak, $z \rightarrow \infty$ giderken, $f[0]=1$ 'i elde ederiz.

6 Son değer teoremi

Limitlerin olması koşuluyla, son değer teoremi, zaman sonsuza giderken zaman fonksiyonunun değerini verir, yani kararlı-hal koşulunu. Bu teorem aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f[\infty] = \lim_{t \rightarrow \infty} f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) \quad [29]$$

Örnek olarak, z -dönüşümü $F(z) = z^2/(z - 1)(z - 0.5)$ olan bir serinin son değerini düşünün. Son değer teoremi aşağıdaki ifadeyi verir:

$$f[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{z-0.5} = 2$$

Ters z -dönüşümü

Laplace dönüşümünde olduğu gibi, zaman bölgesinden, z -bölgesine yapılan dönüşümler, basit cebirsel düzenlemelerle yapılabilir. Sonuçta elde edilen zamana bağlı tepkiyi elde etmek için, fonksiyonun ters dönüşümünün belirlenmesi gerekir. Ayırık zamanlı sinyallerin veya z -dönüşümü ile ifade edilen örneklenmiş zaman fonksiyonlarının serilerini elde etmek *ters z -dönüşümünü* elde etmek olarak tanımlanır. Eğer $z\{f*(t)\} = F(z)$ veya $z\{f[k]\} = F(z)$ ise, ters z -dönüşümü $z^{-1}\{F(z)\}$ ile gösterilir. Dönüşümün tersi, bir kaç yoldan bulunabilir.

1 Tabloları kullanmak

Bu, dönüşüm tablolarının, Tablo 10.1 ve Tablo 10., ve özel bir dönüşümle sonuçlanan bir zaman fonksiyonunu tanımak için, bunların özelliklerinin kullanımını içerir.

Örnek olarak, $3z/(z - 1)$ 'in ters dönüşümünü düşünün. Birim adım fonksiyonu $z/(z - 1)$ z -dönüşümüne sahip olduğundan, tersi, sadece, 3 yüksekliğinde bir adım fonksiyonudur.

2 Kısmi kesirleri kullanmak

Kısmi kesirler, z -dönüşümlerinin basit tanınabilir terimlerin toplamına genişletilmesiyle kullanılır.

Örnek olarak, aşağıdaki fonksiyonun ters dönüşümünü düşünün:

$$F(z) = \frac{z(1 - e^{-T})}{(z - 1)(z - e^{-T})}$$

yukarıdaki fonksiyonun kısmi kesirlerini belirleyebilmemize rağmen, çoğunlukla standart formlara ulaşmamızı sağlayan bir prosedür, $F(z)/z$ 'nin kısmi kesirlerini bulmaktır. Böylece:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1 - e^{-T}}{(z - 1)(z - e^{-T})} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z - e^{-T}}$$

Böylece, $(z - e^{-T})A + (z - 1)B = 1 - e^{-T}$ dir ve bu nedenle $A = 1$ ve $B = -1$ 'dir. Bundan dolayı, dönüşümü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z - e^{-T}}$$

ve bu nedenle:

$$F(z) = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-T}}$$

Birinci terim, 1'dir ve $z/(z - 1)$ ile çarpılmıştır ve bu nedenle 1 çarpı örneklenmiş birim adımın z -dönüşümüdür. İkinci terim $1/(z - e^{-aT})$ formunda bir dönüşümle çarpılmıştır; bu, $e^{-at} = e^{-akt}$ 'nin z -dönüşümüdür. Böylece ter dönüşüm aşağıdaki gibidir:

$$f[k] = 1 - e^{-kT}$$

Eğer örnekleme periyodu 1 s ise, o zaman seri 0, 0.632, 0.865, 0.950, ...'dir.

3 Uzun bölme ile kuvvet serisine genişletme

Bu, payın paydaya uzun bölme yöntemi kullanılarak bölünmesiyle dönüşümü bir kuvvet serisine dönüştürmeyi içerir.

Örnek olarak, örnekleme periyodu 1 s olmak üzere, aşağıdaki fonksiyonun ters dönüşümünü düşünün:

$$F(z) = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

Böylece:

$$F(z) = \frac{0.632z}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

Payın paydaya uzun bölme yöntemi kullanılarak bölünmesiyle aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{0.632z^{-1} + 0.865z^{-2} + 0.950z^{-3} + \dots}{z^2 - 1.368z + 0.368} \mid 0.632z$$

$$\frac{0.632z^{-1} - 0.865z^{-2} + 0.233z^{-1}}{0.865z^{-2} - 0.233z^{-1}}$$

$$\frac{0.865z^{-2} - 1.183z^{-1} + 0.318z^{-2}}{0.950z^{-1} - 0.318z^{-2}}$$

Böylece:

$$F(z) = 0z^0 + 0.632z^{-1} + 0.865z^{-2} + 0.950z^{-3} + \dots$$

ve bu nedenle $f[k]$ serisi 0, 0.632, 0.865, 0.950,...'dir.

Darbe transfer fonksiyonu

Darbe transfer fonksiyonu $x(z)$, ayrık girdinin z -dönüşümü ve $y(z)$ ise ayrık çıktının z -dönüşümü olmak üzere; $G(z)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad [30]$$

$G(z)$ 'nin sadece bir elemanın T aralığı kadar ayrık zamanlarla ayrılmış girdi ve çıktı sinyallerini ilişkilendirdiğine dikkat edin.

Böylece, ayrık zamanlı işlem sistemleri için, aşağıdaki fark denklemi elde edilir:

$$y[k+2] + 2y[k+1] + y[k] = x[k]$$

bunun z -dönüşümünü alırsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$z^2Y[z] + 2zY[z] + Y[z] = X[z]$$

ve bu nedenle:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^2 + 2z + 1}$$

Aşağıdaki transfer fonksiyonuna sahip bir sistem için:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

bu denklemi, kısmi kesirleri kullanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Bu denklemi, z -bölgese, s -dönüşümü ile z -dönüşümünü ilişkilendiren bir tablo kullanarak veya zaman bölgesi fonksiyonları için, s -dönüşümünün zaman bölgesine oradan da zaman bölgesi fonksiyonları için z -dönüşümlerini veren bir tablo kullanımıyla z -bölgese dönüştürebiliriz. Sonuç aşağıdaki gibidir:

$$G(z) = \frac{z}{1-e^{-T}} - \frac{z}{z-e^{-2T}}$$

Seri elemanlar

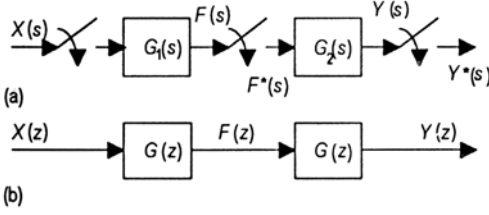
Sistemlerin seri elemanlar şeklinde darbe transfer fonksiyon gösterimi, her bir eleman çiftinin arasında örnekleyici olup olmadığına bağlıdır.

Şekil 10.2, aralarında örnekleyici bulunan seri iki elemanı içeren bir sistemi gösteriyor. Böylece, birinci elemana giren ayrık zamanlı sinyaller, çıktı olarak, ikinci elemana girmesi için ayrık zamanlı sinyal üretiyorlar, aynı zamanda tüm sistemden elde edilen çıktı da ayrık zamanlıdır. Şekil 10.2(a) için, s -bölgesinde, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$Y^*(s) = G_2^*(s)F^*(s) = G_2^*(s)G_1(s)X^*(s) \quad [31]$$

Bundan dolayı, örneklenmiş $T^*(s)$ sinyalleri için toplam transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$T^*(s) = G_2^*(s)G_1(s) \quad [32]$$



Şekil 10.2 Aralarında örnekleyci bulunan seri elemanlar; iki diyagram eşdeğerdir

ve böylece, ilgili z-dönüşümü ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$T(z) = G_2(z)G_1(z) \quad [33]$$

Şimdi de iki eleman arasında örnekleyci bulunmayan, Şekil 10.3'te gösterilen durumu düşünün. $G_1(s)$ ve $G_2(s)$ elemanları darbe dönüşümünü alırken tek bir eleman gibi düşünülmelidir:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

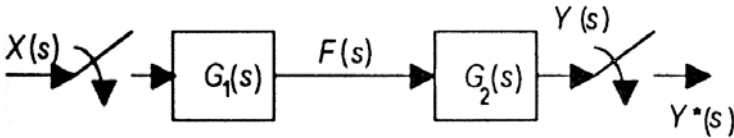
ve böylece:

$$Y^*(s) = G^*(s)X^*(s) = [G_1(s)G_2(s)]^* X^*(s) \quad [34]$$

z-dönüşümü alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$Y(z) = [G_1G_2](z)X(z) \quad [35]$$

$[G_1G_2](z)$ 'nin $G_1(z)G_2(z)$ 'ye eşit olmadığına dikkat edilmelidir.



Şekil 10.3 Elemanlar arasında örnekleyci yok

ZOH'un transfer fonksiyonu

Sıfır-derece tutulumlu elemanı aşağıdaki gibi bir transfer fonksiyonuna sahiptir (denklem [23], 9. bölüm'e bakınız):

$$G_{ZOH} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad [36]$$

Eğer ZOH, $G_p(s)$ transfer fonksiyonuna sahip bir tesisle seri ise, ZOH ile tesis arasında örnekleyici bulunmadığından (Şekil 10.4), bu ikilinin z -dönüşümü denklem [35] kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

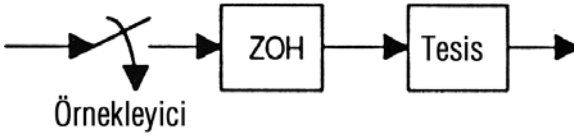
$$G(z) = [G_{ZOH}(s)G_p(s)] \text{ 'nin } z \text{ dönüşümü} \quad [37]$$

$$= \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) \right] \text{ 'nin } z \text{ dönüşümü}$$

$$= \left[\frac{1}{s} G_p(s) - e^{-Ts} \frac{1}{s} G_p(s) \right] \quad [38]$$

Fakat bir Laplace dönüşümünü e^{-Ts} ile çarpmak dönüşümün T gibi bir zamanla geciktirilmiş haline karşılık gelir (3.Bölüme bakınız). z -dönüşümünde örnekleme periyodu T kadar bir zaman gecikmesi, bunun z^{-1} ile çarpılmasını içerir. Böylece denklem [38] aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \times \left[\frac{1}{s} G_p(s) \right] \text{ 'nin } z \text{ dönüşümü} \quad [39]$$



Şekil 10.4 Bir tesisle seri olan ZOH

Örnek olarak, $1/s(s + 1)$ transfer fonksiyonuna sahip bir tesisle seri olan ZOH'yı düşünün. Denklem [39] kullanılırsa, sistem aşağıdaki transfer fonksiyonuna sahiptir:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \times \left[\frac{1}{s^2(s + 1)} \right] \text{ 'nun } z \text{ dönüşümü}$$

kısmi kesirleri kullanarak bu denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \times \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right] \text{ 'nun dönüşümü}$$

$$= (1 - z^{-1}) \left(\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T}} \right)$$

Kapalı-döngü sistemin transfer fonksiyonu

Şekil 10.5'te gösterilen kapalı-döngü sistemi düşünün. $H(s)$ elementinden çıkan sinyal $H(s)Y^*(s)$ 'tir. Bu sinyal $[H(s)Y^*(s)]^* = H^*(s)Y^*(s)$ 'i vermesi için örneklenir. $G(s)$ 'ye giren hata sinyali, böylece $X^*(s) - H^*(s)Y^*(s)$ 'tir. $G(s)$ 'nin çıktısı $Y(s)$ 'tir. Böylece:

$$Y(s) = G(s)[X^*(s) - H^*(s)Y^*(s)]$$

ve bu örneklenirse:

$$Y^*(s) = \{G(s)[X^*(s) - H^*(s)Y^*(s)]\}^*$$

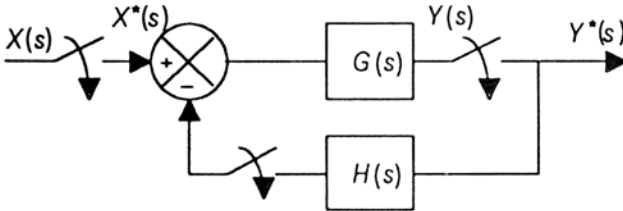
$$= G^*(s)X^*(s) - G^*(s)H^*(s)Y^*(s)$$

Bu denklemin z -dönüşümünü alırsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$Y(z) = G(z)X(z) - G(z)H(z)Y(z)$$

ve bu nedenle sistemin toplam darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır:

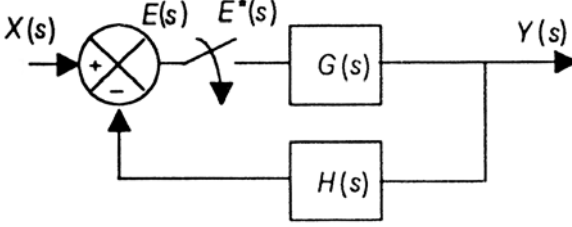
$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad [40]$$



Bir başka kapalı-döngü sistem formunu düşünün (Figür 10.6). $G(s)$ 'in girdisi örneklenmiş $E^*(s)$ sinyalıdır ve çıktısı $Y(s)$, bundan

dolay $Y(s) = G(s)E^*(s)$ 'dir. $H(s)$ 'ten çıkan sinyal $H(s)Y(s)$ 'tir. Hata sinyali $E(s)$ böylece aşağıdaki gibidir:

$$E(s) = X(s) - H(s)Y(s) = X(s) - G(s)H(s)E^*(s)$$



Şekil 10.6 Kapalı-döngü sistem

Bu hata örneklendiği zaman aşağıdaki denklem elde edilir:

$$E^*(s) = X^*(s) - [G(s)H(s)]^* E^*(s)$$

Bu denklemin z -dönüşümünü alırsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$E(z) = X(z) - GH(z)E(z)$$

ve bu nedenle sistemin darbe transfer fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \quad [41]$$

Örnek olarak, transfer fonksiyonu $1/s(s + 1)$ olan tesise sahip Figür 10.7'de gösterilen kapalı-döngü sistemi düşünün. ZOH elemanı ile tesisin arasında örnekleyci bulunmadığından $G(s) = G_{ZOH}(s)G_p(s)$ 'dir ve bu nedenle:

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s(s+1)}$$

Kısmi kesirler kullanılarak, bu denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$G(s) = (1 - e^{-Ts}) \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right) \quad [42]$$

Bundan dolayı:

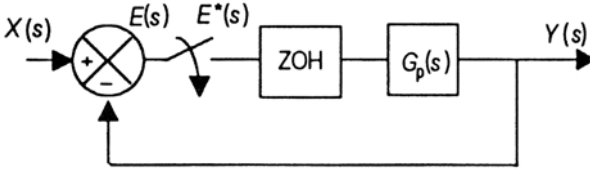
$$G(z) = (1 - z^{-1}) \left(\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T}} \right) \quad [43]$$

Örnekleme periyodu $T = 1$ s alınırsa, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$G(z) = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - 1.37z + 0.37} \quad [44]$$

$H(s) = 1$ olduğundan, denklem [42]'yi de kullanarak

$$G(s)H(s) = (1 - e^{-Ts}) \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right) \quad [45]$$



Şekil 10.7 Kontrol sistemi

ve bundan dolayı:

$$GH(z) = (1 - z^{-1}) \left(\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T}} \right) \quad [46]$$

Örnekleme periyodu $T = 1$ s alınırsa, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$GH(z) = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - 1.37z + 0.37} \quad [47]$$

Denklem [41] kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$T(z) = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - z + 0.63} \quad [48]$$

Sisteme bir birim darbe girdisi olduğunu varsayalım. Birim darbenin z-dönüşümü 1 olduğundan çıktı $Y(z)$ aşağıdaki gibidir:

$$Y(z) = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - z + 0.63}$$

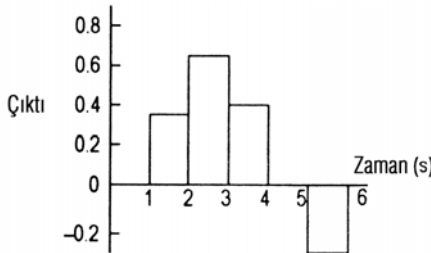
Uzun bölme kullanarak, bu denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$Y(z) = 0.37z^{-1} + 0.63z^{-2} + 0.40z^{-3} - 0.25z^{-5} + \dots \quad [49]$$

Bundan dolayı ters dönüşüm aşağıdaki ayrık zamanlı seriyi verir:

$$0, 0.37, 0.63, 0.40, 0, -0.25, \dots$$

Buna rağmen, çıktı bir ZOH elemanından sonra yer aldığından, düzeltilecektir ve adımli bir çıktı verecektir (Figür 11.8).



Şekil 10.8 Çıktı

z-düzlemi

Darbe transfer fonksiyonu, genelde, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} \quad [50]$$

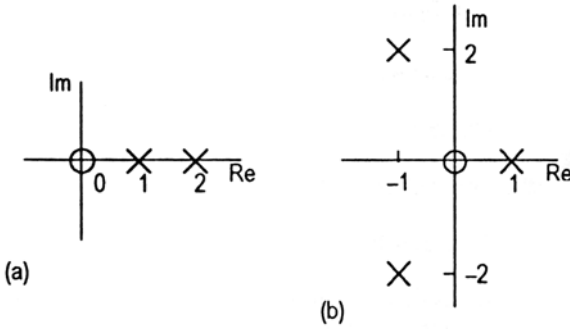
Bu denklemin kökleri aşağıdaki gibidir:

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0 \quad [51]$$

ve sıfırları aşağıdaki gibidir:

$$b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m \quad [52]$$

Örnek olarak, $z/(z-1)(z-2)$ darbe transfer fonksiyonunu veren bir sistem, $z = 0$ 'da bir sıfıra ve $z = 1$ ve $z = 2$ 'de iki kutba sahiptir (Şekil 10.9(a)). $z/(z-1)(z^2 + 2z + 5)$ darbe transfer fonksiyonunu veren bir sistem, $z = 0$ 'da bir sıfıra ve $z = 1$ ve $z = -1 \pm j2$ 'de üç kutba sahiptir (Şekil 10.9(b)).



Şekil 10.9 (a) $z/(z-1)(z-2)$, (b) $z/(z-1)(z^2-2z+5)$

Kutup konumu ve geçici tepki

$G(z) = 1/(z - 2)$ darbe transfer fonksiyonuna sahip bir sisteme bir birim darbe girdisinin uygulandığını düşünün. Çıktı böylece aşağıdaki gibidir:

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{1}{z-2} \times 1$$

Uzun bölme kullanılarak aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$Y(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3} + 8z^{-4} + \dots$$

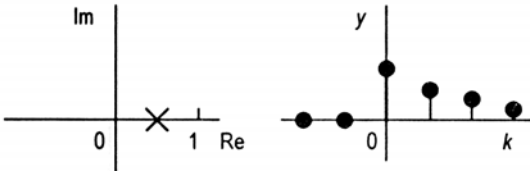
Bu denklemin tersi 1, 2, 4, 8, ... serisini verir.

Yukarıdaki örnek reel eksen üzerinde $z = 2$ 'de bir kutba sahip bir sistem içindi. Genelde, eğer reel eksen üzerinde $z = a$ 'da bir kutbumuz varsa, çıktı, birim darbe fonksiyon girdisi olduğu zaman aşağıdaki gibidir:

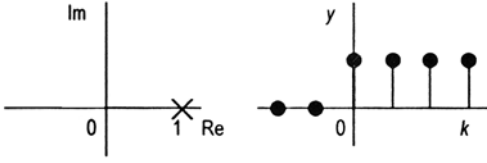
$$1, a, a^2, a^3, a^4, \dots = a^k \quad [53]$$

Farklı a değerleri için çıktının formunu düşünün:

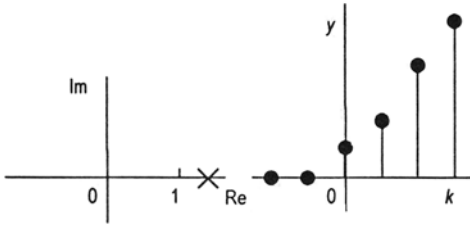
- 1 a pozitif ve 1'den küçükse, çıktı zamanla bozunur, $y[k] = Ca^k$ (Figür 11.10). Örnek olarak, $a = \frac{1}{2}$ için, çıktı, 1, 0.5, 0.25, 0.0625, ...'dır.
- 2 $a = 1$ ise, darbe sabittir, yani 1, 1, 1, 1, 1, ...'dır (Şekil 10.11).
- 3 a birden büyükse, çıktı zamanla büyür, $y[k] = Ca^k$ (Şekil 10.12). Örnek olarak, $a = 2$ için, çıktı, 1, 2, 4, 8, ...'dır.
- 4 a negatif ve 1'den küçükse, çıktı salınım yapar ve zamanla bozunur, $y[k] = C(a)^k$ (Figür 10.13). Örnek olarak, $a = \frac{1}{2}$ için, çıktı, 1, -0.5, 0.25, -0.0625, ...'dır.
- 5 $a = -1$ ise darbe değişimli sabittir, yani 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...'dır (Şekil 10.14).
- 6 a , -1'den büyükse, çıktı salınım yapar ve zamanla artar, $y[k] = C(a)^k$ (Şekil 10.15). Örnek olarak, $a = -2$ için, çıktı, 1, -2, 4, -8, ...'dır.



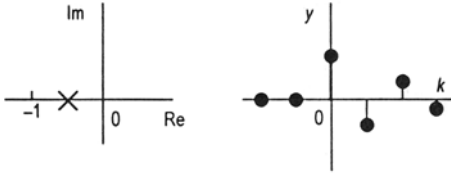
Şekil 10.10 Bozunan seri



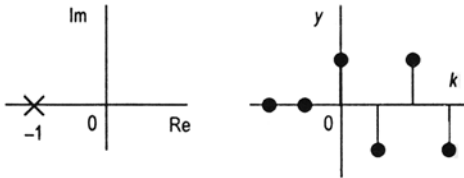
Şekil 10.11 Sabit seri



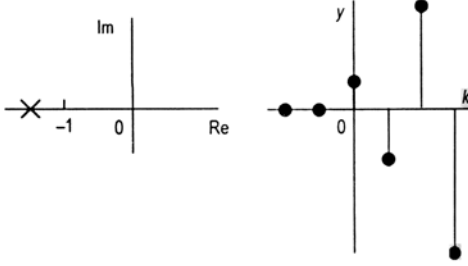
Şekil 10.12 Genişleyen seri



Şekil 10.13 Bozunan salınımlı seri



Şekil 10.14 Sabit salınımlı seri



Şekil 10.15 Genişleyen salınımlı seri

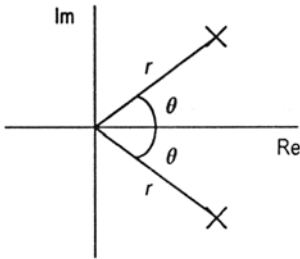
Şimdi de, sistem bir çift kompleks eşlenik kutba sahipse; bu sistemin bir darbeye tepkisini düşünelim. Eğer kutuplar, r yarıçapına, θ açısına sahipse (Şekil 10.16) $z = e^{\pm j\theta}$ dir. Bir birim darbe girdisi olduğu zaman, çıktı aşağıdaki gibidir:

$$y[k] = C_1 (re^{j\theta})^k + C_2 (re^{j\theta})^k \quad [54]$$

Bu denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y[k] = r^k (C_1 re^{j\theta k} + C_2 re^{j\theta k}) = Ar^k \cos(k\theta + \phi) \quad [55]$$

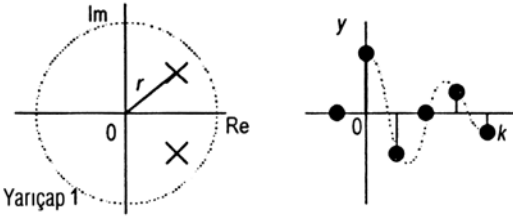
Tepki böylece, bir sinüzoidtir ve örnekler arasındaki zaman T olduğundan, frekans θ/T 'dir.



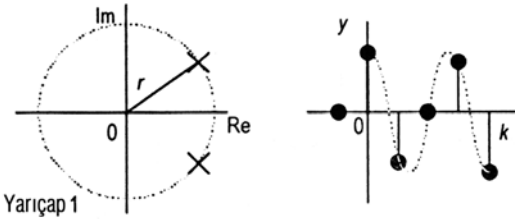
Şekil 10.16. Karmaşık/kompleks eşlenik kutup

Tepki, kompleks eşlenik köklerin konumuna bağlıdır:

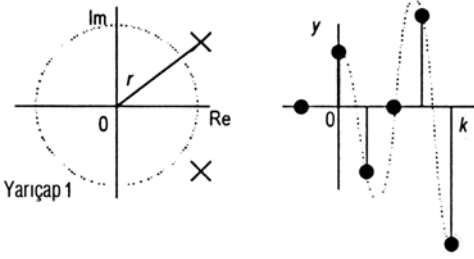
- 1 r , 1'den küçükse ve kökler düzlemin sağ tarafında ise; tepki sönümlmeli sinüzoidal bir seridir (Şekil 10.17).
- 2 r , 1 ise ve kökler düzlemin sağ tarafında ise, tepki sabit genlikli sinüzoidal bir seridir (Şekil 10.18).
- 3 r , 1'den büyükse ve kökler düzlemin sağ tarafında ise, tepki genişleyen sinüzoidal bir seridir (Şekil 10.19).
- 4 r , 1'den küçükse ve kökler düzlemin sol tarafında ise, tepki sönümlmeli sinüzoidal değişimli bir seridir (Şekil 10.20).
- 5 r , 1 ise ve kökler düzlemin sol tarafında ise, tepki sabit genlikli bir sinüzoidal değişimli bir seridir (Şekil 10.21).
- 6 r , 1'den büyükse ve kökler düzlemin sol tarafında ise, tepki genişleyen sinüzoidal değişimli bir seridir (Şekil 10.22).



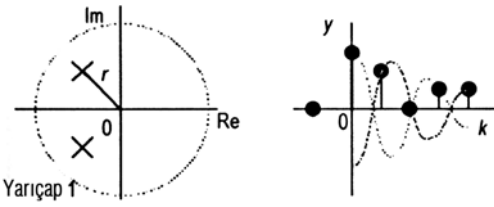
Şekil 10.17 $r < 1$ için sönümlmeli sinüzoidal seri



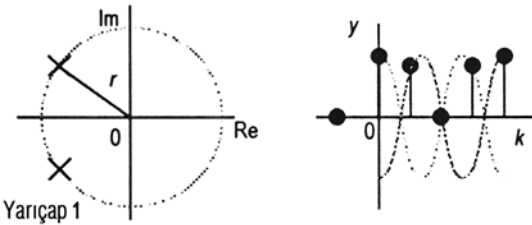
Şekil 10.18 $r = 1$ için sabit genlikli sinüzoidal seri



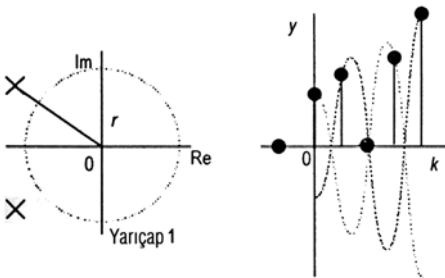
Şekil 10.19 Genişleyen sinüzoidal seri



Şekil 10.20 Sönümlmeli değişimli sinüzoidal seri



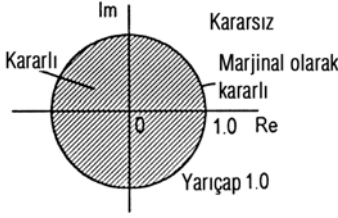
Şekil 10.21 Sabit genlikli değişimli sinüzoidal seri



Şekil 10.22 Genişleyen sinüzoidal seri

z-bölgesinde kararlılık

Şekil 10.10'dan 10.15'e kadar ve Şekil 10.17'den 10.22'ye kadar olan şekillerden de anlaşılacağı üzere, ayrık zamanlı bir sistemin kararlı olabilmesi ve bir darbenin bozunan bir geçici çıktı vermesi için, kutup z-düzleminin orijininin 1.0 yarıçapı dahilinde olmalıdır (Şekil 10.23). Yarıçapı 1 olan bir kutup, marjinal olarak kararlı olan bir sistem verir. Yarıçapı 1.0'dan büyük olan bir kutup kararsız bir sistem verir.



Şekil 10.23 z-düzleminin kararlılık bölgesi

Örnek olarak, aşağıdaki darbe transfer fonksiyonlarına sahip örneklem-verili kapalı-döngü kontrol sistemini düşünün:

1 $G(z) = 2z / (z - 0.7)$

Çünkü sistem $z = 0.7$ 'de bir kutba sahiptir ve birim yarıçaplı çemberin içine düşer; bu sistem kararlıdır.

2 $G(z) = (z^2 - 0.25)(z^2 + 0.25)$

payda, $(z + j0.5)(z - j0.5)$ olarak yazılabilir. Böylece, bu denklem, $z = \pm j0.5$ 'de bir çift kompleks eşlenik kutbuna sahiptir. Hepsi de birim yarıçaplı çemberin içine düştüğünden, sistem kararlıdır.

3 $G(z) = 4z / (3z^2 + 2z - 1)$

Karakteristik denklem aşağıdaki kökleri verir:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = 0.33$$

-1.00 kökü birim yarıçaplı çember üzerine düşer ve bu nedenle sistem marjinal olarak kararlıdır.

4 $G(z) = (z + 0.5)(z^2 + 2z + 1.25)$

Karakteristik denklem aşağıdaki kökleri verir:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-5}}{2} = -1.00 \pm j0.5$$

kökün birinin radyal uzunluğu $\sqrt{1.00^2 + 0.5^2} = 1.1$ olduğundan sistem kararsızdır.

s-düzlemi ile z-düzlemi arasındaki ilişki

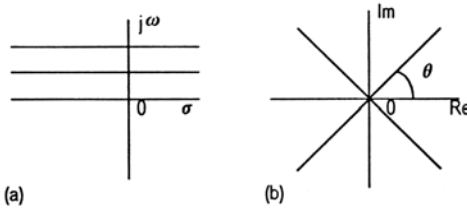
z , e^{sT} olarak tanımlanır, böylece, s , $s = \sigma + j\omega$ ifadesi ile tanımlanabileceğinden, aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$z = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \quad [56]$$

Böylece, z , $e^{\sigma T}$ büyüklüğüne ve ωT faz açısına sahip kompleks bir niceliktir.

Sabit σ çizgileri

s -düzlemindeki dikey çizgiler (Şekil 10.24(a)), ω değişirken, sabit σ değerlerine sahiptir. Z -düzleminde, denklem [56]'da gösterildiği gibi bu tip çizgiler, ω değişirken sabit büyüklüğe sahiptir ve bu nedenle orijinde bulunan dairelerdir (Şekil 10.24(b)). S -düzlemi için, düzlemin sol yarısı ile sağ yarısının birbirine bölümü, $\sigma = 0$ çizgisine karşılık gelir. Z -düzlemi için, $\sigma = 0$ olduğu zaman $e^{\sigma T} = 1$ 'dir ve bu nedenle birim yarıçaplı çember bu bölümün eşdeğeridir. s -düzleminde kararlılık için, bütün kutuplar düzlemin sol tarafında yer almalıdır. s -düzleminin sol tarafının tamamı, z -düzleminde birim yarıçaplı çemberin iç alanına karşılık geldiğinden, bütün z -düzlemi kutupları, kararlılık için, birim yarıçaplı çemberin içinde yer almalıdır.

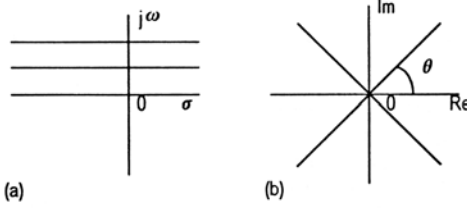


Şekil 10.24 (a) s -düzlemindeki dikey çizgiler ve (b) bunların z -düzlemindeki karşılıkları

Sabit sönümlleme frekansı ω çizgileri

s -düzlemindeki yatay çizgiler (Şekil 10.25(a)), sabit sönüm frekansı ω 'ye sahip bir çizgidir. z -düzlemi üzerinde, denklem [56]'nın belirttiği gibi, sabit bir sönüm frekansının anlamı, sabit bir faz açısı demektir ve böylece orijin üzerinde doğrusal bir çizgi ile gösterilir (Şekil 10.25(b)), reel eksene olan açılar $\theta = \omega T$ 'dir.

Örnekleme frekansı $\omega_s = 2\pi/T$ 'dir ve bu nedenle sabit faz açısı θ 'ya sahip bir çizgi için, $\theta = \omega T = 2\pi\omega/\omega_s$ 'tir. $\omega = 0$ için, $\theta = 0$ 'dır ve bu nedenle noktalar pozitif reel eksen üzerinde yer alır. $\omega = \omega_s/4$ için, $\theta = \pi/2 = 90^\circ$ 'dir ve bu nedenle noktalar pozitif sanal eksen üzerinde yer alır. $\omega = \omega_s/2$ için, $\theta = \pi = 180^\circ$ 'dir ve bu nedenle noktalar negatif reel eksen üzerinde yer alır. $\omega = 3\omega_s/4$ için, $\theta = 3\pi/2 = 270^\circ$ 'dir ve bu nedenle noktalar negatif sanal eksen üzerindedir. $\omega = \omega_s$ için, $\theta = 2\pi = 360^\circ$ 'dir ve noktalar yine pozitif reel eksen üzerindedir.



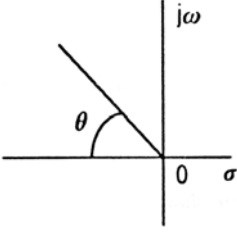
Şekil 10.25 (a) s -düzlemindeki yatay çizgiler ve (b) bunların z -düzlemindeki karşılıkları

Sabit sönümlleme oranı çizgileri

Sabit bir sönümlleme oranı ζ için, s -düzleminde sabit θ açılı radyal bir çizgi vardır (Şekil 10.26). $\zeta = \cos \theta$ olduğundan (Bölüm 7.ye bakınız), eğer dik açılı bir üçgen kullanırsak ve Pisagor teoremini kullanırsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad [57]$$

Sabit bir sönümlleme değeri s -düzlemindeki radyan çizgi için, sabit bir gradyan verdiğinden, $\tan \theta = -\omega/\sigma$ 'dir.



Şekil 10.26 *s-düzlemindeki sabit sönümleme oranı çizgileri*

z-düzleminde

$$\theta = \omega T \quad [58]$$

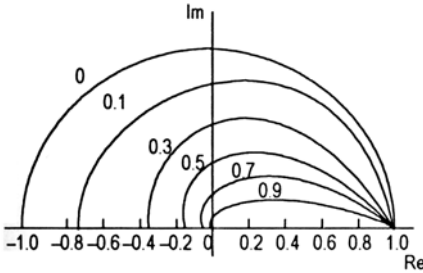
ve (denklem [56]) z 'nin büyüklüğü $r = e^{\sigma T}$ olduğundan:

$$\sigma = \frac{\ln r}{T} \quad [59]$$

ve bu nedenle aşağıdaki denklemleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} -\frac{\theta/T}{(\ln r)/T} &= \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \\ \ln r &= \frac{\theta\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned} \quad [60]$$

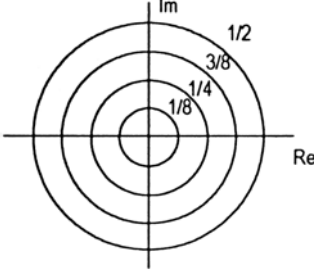
Böylece, z-düzleminde, sabit sönümleme oranı çizgileri, logaritmik spirallerdir (Figür 11.27). Bu spiraller *Jury konturları* olarak adlandırılır.



Şekil 10.27 *z-düzlemindeki sabit sönümleme oranı çizgileri*

Sabit doğal frekans çizgileri

s -düzleminde, sabit doğal frekans ω_n yer eğrisi, merkezleri orijinde bulunan ve yarıçapları ω_n olan eşmerkezli dairelerdir (Bölüm 7'ye bakınız şekil 10.28).



Şekil 10.28 s -düzleminde farklı ω_n/ω_s değerleri için sabit ω_n yer eğrisi

z -düzleminde, ω_n yer eğrisi üzerindeki noktalar için, aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} \quad [61]$$

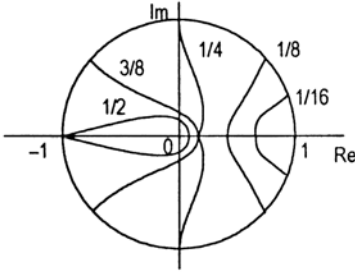
Fakat (8.Bölümde, denklem [32] yi hatırlarsak):

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2 \quad [62]$$

Böylece, s -düzleminin sol tarafındaki noktalara karşılık gelen noktalar için, aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$z = e^{(-\sqrt{\omega_n^2 - \omega^2} + j\omega)T} \quad [63]$$

Şekil 10.29, z -düzleminde, sabit z_n yer eğrilerinin bazılarını gösteriyor. yer eğrileri gerçekte her yerde sabit sönümlleme faktörüne yer eğrilerine ortogonaldır, yani dik açıdır.



Şekil 10.29 z -düzleminde farklı ω_a/ω_s değerleri için sabit ω_a yer eğrisi

z -bölgesinde kararlılık testleri

Ayrık zamanlı sistemlerde kararlılık için, karakteristik denklemin bütün kökleri z -düzleminde birim yarıçaplı çemberin içinde yer almalıdır. Bunun sonucunda, kararlılık için, sürekli zaman sistemleri için kullanılan Routh-Hurwitz testi, bu test sistemin bütün köklerinin s -düzleminin sol yarısında yer alıp almadığını belirlemek için dizayn edildiğinden; z -düzlemindeki kökler için doğrudan uygulanamaz.

Bi-linear dönüşüm metodu

Buna rağmen, eğer z 'yi aşağıdaki ifadeyle yer değiştirirsek, Routh-Hurwitz testini ayrık zamanlı sistemler için uygulayabiliriz:

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad [64]$$

Bunu yapmakla, bütün z -köklerinin birim yarıçaplı çember içinde yer alma koşulu, bütün köklerin w -düzleminin sol yarısında yer alması koşuluna dönüşür, bu nedenle test, s -düzlemi için kullanılan Routh-Hurwitz ile aynı formata dönüşür.

Bir örnek olarak, ayrık zamanlı bir sistem düşünün:

$$G(z) = \frac{2z+1}{z^2+0.4z-0.1}$$

Denklem [64]'ü kullanarak z 'ler yer değiştirirse, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$G(w) = \frac{2(1+w)/(1-w)+1}{[(1+w)(1-w)]^2 + 0.4(1+w)/(1-w) - 0.1}$$

$$= \frac{(w+3)(1-w)}{1.3 + 2.2w + 0.5w^2}$$

Bu karakteristik denklem için, aşağıdaki Routh tablosu oluşturulabilir:

$$\begin{array}{c|cc} w^2 & 0.5 & 1.3 \\ w^1 & 2.2 & \\ w^0 & 1.3 & \end{array}$$

İlk kolonda işaret değişimi olmadığından, w 'nin kutuplarının tamamı w -düzleminin solunda yer alır. Bunun sonucunda, z 'nin kutupları birim yarıçaplı çemberi içinde yer alır ve sistem kararlıdır.

Jury testi

Bir darbe transfer fonksiyonunun bütün köklerinin birim çember içinde yer alıp yer almadığını belirlemek için kullanılan bir başka test, Jury testidir. Bu test için, karakteristik denklem aşağıdaki formdadır:

$$F(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k = 0 \quad [65]$$

Bu durumda, aşağıdaki formda bir tablo oluşturulur.

Sıra

1	a_0	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\dots$	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_{n-1}	b_n
4	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_1	b_0
5	c_0	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_{n-1}	c_n
6	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\dots$	c_1	c_0
7	d_0	d_1	d_2	d_3	$\dots$	d_{n-1}	d_n
8	d_n	d_{n-1}	d_{n-2}	d_{n-3}	$\dots$	d_1	d_0

v.b.

1 Birinci satır, alınan karakteristik denklemin katsayılarını içerir.

- 2 İkinci satır, aynı katsayılarla sahiptir fakat ters olarak sıralanır.
- 3 Üçüncü satır, sırayla alınmış b katsayılarına sahiptir ve aşağıdaki determinant yardımıyla belirlenir:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad [66]$$

- 4 Dördüncü satır, bu b katsayılarının ters olarak sıralanmasıyla oluşur.
- 5 Beşinci satır, sırayla alınmış c katsayılarına sahiptir ve aşağıdaki determinant yardımıyla belirlenir:

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \quad [67]$$

- 6 Altıncı satır, bu c katsayılarının ters olarak sıralanmasıyla oluşur.
- 7 Yedinci satır, sırayla alınmış d katsayılarına sahiptir ve aşağıdaki determinant yardımıyla belirlenir:

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix} \quad [68]$$

- 8 Sekizinci satır, bu d katsayılarının ters olarak sıralanmasıyla oluşur.

Bu prosedür, satır, üç sayılı bir satıra indirgenene kadar devam eder.

Jury testi, karakteristik denklemin köklerinin, sadece ve sadece aşağıdaki koşullar sağlandığında, z -düzleminde birim çember içinde yer alacağını ifade eder:

$$F(1) > 0 \quad [69]$$

$$(-1)^n F(-1) > 0 \quad [70]$$

Denklem [70], aşağıdaki koşula karşılık gelir:

$$F(-1) > 0 \quad [71]$$

$$F(-1) < 0$$

[72]

Bununla birlikte, aşağıdaki koşullar da sağlanmalıdır:

$$|a_0| < a_n \quad |b_0| < |b_{n-1}| \quad |c_0| < |c_{n-2}| \quad |d_0| < |d_{n-3}| \quad [73]$$

Bunu örneklendirmek için, aşağıdaki karakteristik denkleme sahip bir darbe transfer fonksiyonu düşünün:

$$F(z) = z^3 + 2z^2 + 1.9z + 0.7 = 0$$

Denklem [69]'la sağlaması yapılırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$F(1) = 1 + 2 + 1.9 + 0.7 = 5.6$$

bu nedenle, $F(1)$, 0'dan büyüktür ve dolayısıyla kararlılığın sağlanması olarak dahilindedir. Denklem [70]'le sağlaması yapılırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$F(-1) = -1 + 2 - 1.9 + 0.7 = -0.2$$

bu nedenle $(-1)^3 F(-1) = 0.2$ 'dir ve böylece 0'dan büyüktür. Kararlılık böylece olanaklıdır.

Yukarıda sağlanan koşullarla, katsayı tablosunu oluşturarak kararlılığını kontrol edebiliriz. Başlamak için, birinci ve ikinci satırı aşağıdaki gibi yazabiliriz:

Sıra				
1	0.7	1.9	2.0	1.0
2	1.0	2.0	1.9	0.7

Daha sonra üçüncü satır için olan katsayıları hesaplarız:

$$b_0 = \begin{vmatrix} 0.7 & 1.0 \\ 1.0 & 0.7 \end{vmatrix} = -0.51 \quad b_1 = \begin{vmatrix} 0.7 & 2.0 \\ 1.0 & 1.9 \end{vmatrix} = -0.67 \quad b_2 = \begin{vmatrix} 0.7 & 1.9 \\ 1.0 & 2.0 \end{vmatrix} = -0.5$$

Oluşan tablo aşağıdaki gibidir:

Sıra				
1	0.70	1.90	2.00	1.00
2	1.00	2.00	1.90	0.70
3	-0.51	-0.67	-0.50	

İçeriğinin kontrol edilmesi, bizi aşağıdaki sonuçlara ulaştırır:

$$0.7 < 1.0 \text{ olduğundan } |a_0| < a_n$$

$$|-0.51| < |-0.50| \text{ olduğundan } |b_0| < |b_{n-1}|$$

Böylece, bütün gereklilikler sağlandığından, z-düzleminde, birim çember dışında hiçbir kök yoktur.

Ayrık zamanlı sistemlerin kararlı hal hataları

Şekil 10.30'da gösterilen ayrık zamanlı kontrol sistemini düşünün. hata sinyali $e^*(t)$ aşağıdaki gibidir:

$$e^*(t) = x^*(t) - y^*(t) \quad [74]$$

veya örneklemenin bazı zamanlarında $t = kT$ olduğundan, bu denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$e(kT) = x(kT) - y(kT) \quad [75]$$

Örnekleme anlarındaki, kararlı-hal hatası aşağıdaki gibidir:

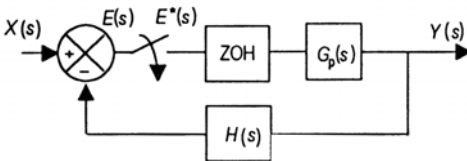
$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) \quad [76]$$

z-dönüşümünün son değer teoremini kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$e_{ss}^* = \lim_{s \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) \quad [77]$$

$E(s) = X(s) - H(s)Y(s) = X(s) - H(s)G_p(s)G_{ZOH}(s)E^*(s)$ olduğundan, darbeler için sistemi düşünürsek, $E^*(s) = X^*(s) - [H(s)G_p(s)G_{ZOH}(s)]^* E^*(s)$ elde edilir ve bu nedenle tekrar düzenlendiğinde ve dönüşümü alındığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$E(z) = \frac{X(z)}{1 + [HG_pG_{ZOH}](z)} \quad [78]$$



Şekil 10.30 Ayrık zamanlı kontrol sistemi

Böylece, denklem [77] aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \left(\frac{X(z)}{1 + [HG_p G_{ZOH}](z)} \right) \quad [79]$$

Bir adım girdisi için kararlı-hal hatası

Sistemin girdisi, bir birim adım fonksiyonu olduğu zaman, $X(z) = z/(z-1)$ 'dir. Sadeleştirmek için, birim geri besleme durumunu varsayalım; denklem [79] aşağıdaki denkleme verir:

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G_p G_{ZOH}(z)} = \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G_p G_{ZOH}(z)} \quad [80]$$

Adım-hata katsayısını aşağıdaki gibi tanımlanırsa:

$$K_p^* = \lim_{z \rightarrow 1} G_p G_{ZOH}(z) \quad [81]$$

aşağıdaki denklem elde edilir:

$$e_{ss}^* = \frac{1}{1 + K_p^*} \quad [82]$$

Tesisin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$G_p(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad [83]$$

Eğer orijinde a tane sıfır ve b tane kutup varsa denklem [83], $j = b - a$ olmak üzere, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$G_p(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_{m-a})}{s^j (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{n-b})} \quad [84]$$

Darbe transfer fonksiyonu $G_p G_{ZOH}(s)$ böylece aşağıdaki gibidir:

$$G_p G_{ZOH}(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_{m-a})}{s^j (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{n-b})} \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

ve böylece:

$$G_p G_{ZOH}(z) = (1 - z^{-1}) \times K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_{m-a})}{s^{j+1} (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{n-b})} \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad \text{'nin } z\text{-dönüşümü} \quad [85]$$

Tip 0 olan bir sistem için, $j = 0$ 'dır ve bu nedenle denklem [85] aşağıdaki forma dönüşür:

$$G_p G_{ZOH}(z) = (1 - z^{-1}) \times \frac{K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_{m-a})}{s^j (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{n-b})} \frac{1 - e^{-Ts}}{s}}{s} \text{ 'nin } z\text{-dönüşümü}$$

[86]

Kısmi kesirler kullanılırsa, denklem [86]'yı aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} G_p G_{ZOH}(z) &= (1 - z^{-1}) \times \frac{K}{s} + \text{sıfır olamayan kutuplar için gerekli terimlerin } z\text{-dönüşümü:} \\ &= (1 - z^{-1}) \left(\frac{Kz}{z-1} + \text{sıfır olamayan kutuplar için gerekli terimler} \right) \\ &= K + \left(\frac{z-1}{z} \right) \text{sıfır olamayan kutuplar için gerekli terimler} \end{aligned}$$

[87]

Sıfır olmayan kutuplar için gereken terimler, paydalarında $(z - 1)$ içermeyeceğinden, denklem [81]'le verilen adım hata katsayısı aşağıdaki gibi olacaktır:

$$K_p^* = K \quad [88]$$

$1/(1 + K)$ birim adımı için, böylece bir kararlı-hal hatası vardır.

Tip 1 olan bir sistem, transfer fonksiyonunun paydasında s^2 terimini içerir, bundan dolayı darbe transfer fonksiyonunda $(z-1)^2$ terimini içerir. Bunun sonucunda, adım-hata katsayısı sonsuzdur ve kararlı-hal hatası yoktur.

Bir rampa girdisi için kararlı-hal hatası

Girdi birim rampa fonksiyonu olduğu zaman, yani $x(t) = t$, denklem [79], birim geri beslemeyle, aşağıdaki kararlı-hal hatasını verir:

$$\begin{aligned} e_{ss}^* &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)(1 + G_p G_{ZOH}(z))} \\ &= \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} G_p G_{ZOH}(z)} \end{aligned} \quad [89]$$

Rampa-hata katsayısını aşağıdaki gibi tanımlarız:

$$K_v^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} G_p G_{ZOH}(z) \quad [90]$$

ve bu nedenle:

$$e_{ss}^* = \frac{1}{K_{ss}^*} \quad [91]$$

Önceki bölümde adım girdisinde olduğu gibi, rampa-hata katsayısını farklı tip numaralı tesisler için belirleyebiliriz. Tip 0 olan bir tesis için, rampa-hata katsayısı 0'dır ve bu nedenle kararlı-hal hatası sonsuzdur; tip 1 olan bir tesis ile, rampa-hata katsayısı K 'dır ve bu nedenle kararlı-hal hatası $1/K$ 'dır, daha yüksek bir tip numaralı tesisler için, rampa-hata katsayıları sonsuzdur ve bu nedenle kararlı-hal hatası sıfırdır.

Parabolik bir girdi için kararlı-hal hatası

Parabolik bir girdi için, $x(t) = t^2$, denklem [79], birim geri beslemeyle, aşağıdaki kararlı-hal hatasını verir:

$$\begin{aligned} e_{ss}^* &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2(z+1)}{(z-1)^2(1+G_p G_{ZOH}(z))} \quad [92] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2}{\frac{(z-1)^2}{T^2} G_p G_{ZOH}(z)} \end{aligned}$$

Parabolik-hata katsayısını aşağıdaki gibi tanımlarız:

$$K_a^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2}{T^2} G_p G_{ZOH}(z) \quad [93]$$

ve bu nedenle:

$$e_{ss}^* = \frac{2}{K_{ss}^*} \quad [94]$$

Adım girdi bölümünde olduğu gibi, parabolik-hata katsayısını farklı tip numaralı tesisler için belirleyebiliriz. Tip 0 ve tip 1 olan tesisler için, parabolik-hata katsayısı 0'dır ve bu nedenle kararlı-hal hatası sonsuzdur, tip 2 olan bir tesis ile, parabolik -hata katsayısı K 'dır ve bu nedenle kararlı-hal hatası $1/K$ 'dır; daha yüksek bir tip numaralı tesisler için, parabolik-hata katsayıları sonsuzdur ve bu nedenle kararlı-hal hatası sıfırdır.

Ayrık zamanlı bir sistemin frekans tepkisi

Önceki bölümlerde anlatılan frekans bölgesi analiz metotları, ayrık-zamanlı kontrol sistemleri için genişletilebilir. Ayrık zamanlı

sistemlerin frekans tepkilerini belirlemek için, örnekleme periyodu T ile bir sinüzoidi örnekleyerek elde edilen ayrık zamanlı bir girdi kullanabiliriz. Sürekli zaman sistemlerin frekans tepkisi, transfer fonksiyonunda, s yerine $j\omega$ yazılarak elde edilebilir. $z = e^{sT}$ olduğundan, ayrık zamanlı bir sistemin frekans tepkisi, darbe transfer fonksiyonunda, z yerine $e^{j\omega T}$ yazılarak elde edilebilir.

Örnek olarak, darbe transfer fonksiyonu $(z^2 - 0.25)(z^2 + 0.25)$ olan bir sistemi düşünün. z yerine $e^{j\omega T}$ yazılırsa, aşağıdaki darbe frekans tepkisi elde edilir:

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{e^{j2\omega T} - 0.25}{e^{j2\omega T} + 0.25}$$

Daha sonra, basit biçimde $e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$ olarak yazılan Euler denklemini kullanabiliriz ve böylece yukarıdaki denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{\cos 2\omega T - 0.25 + j \sin 2\omega T}{\cos 2\omega T + 0.25 + j \sin 2\omega T}$$

Tepkinin büyüklüğü ve faz açısı daha sonra olağan yollardan belirlenebilir.

11.Bilgisayar kontrol sistemleri

Bilgisayar kontrolü

Aşağıdakiler, bilgisayar kontrol sistemlerini tanımlamada kullanılan bazı terimlerdir:

1 *Doğrudan dijital kontrol*

Bu terim, tesisi kontrol etmek için çalıştırıcılara uygulanan kontrol sinyali hesaplamak için, kontrol sistemlerinde dijital bilgisayar kullanımını açıklar.

2 *Gerçek-zamanlı sistemler*

Gerçek-zamanlı bilgisayar kontrolü: bilgisayarın, tesisten girdileri okuyup, bilgisayar sistemi yerine tesisin operasyon bilgilerine göre belirlenen zamanlarda kontrol sinyali gönderdiği durumdur. Bilgisayar tarafından yürütülen işlem, harici işlemcilerin zaman ölçeklerine dayanır.

3 *Yerleşik bilgisayarlar*

Yerleşik terimi, bilgisayarın tek başına değil; bir gerçek zamanlı kontrol sisteminin bir elemanı olduğunu anlatır. Bilgisayar, kontrol sistemine yerleştirilmiştir.

Doğrudan dijital kontrol kuralı dizaynı

Doğrudan dijital kontrol kuralları iki temel yoldan belirlenebilir:

1 *Sürekli bölge dizaynı*

Bir sürekli zaman kontrol sistemi için sürekli bir kontrolör dizayn edin ve daha sonra bunu bir ayrık zaman kontrol yasasına yakınsatın. Bu kontrolör için $G(s)$ 'i bulmayı ve daha sonra dijital kontrol dizaynını tamamlamak için sonucun ayrık hale getirilmesini içerir.

2 *Dijital dizayn*

Sistemi doğrudan ayrık zamanlı bir kontrol sistemi olarak düşünün ve dijital bir kontrolör dizayn edin. Kontrolörün $G(z)$ 'sini doğrudan elde etmek için sistemin ayrık zaman

modellemesini içerir ve bunun sonucunda dijital kontrol dizaynı tamamlanır.

Sürekli zaman kontrolörlerinin dijital implamantasyonu

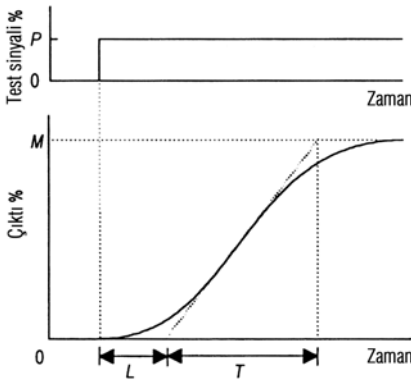
Kullanılabilecek bir metot, Ziegler ve Nichols'tur. Onlar, bir tesisin bir zaman gecikmesiyle birinci-derece bir elemanın seri gösterimi şeklinde ifade edilebileceğini savunurlar ve bu nedenle aşağıdaki transfer fonksiyonu ile T zaman gecikmesi ve τ zaman sabiti olmak üzere, ifade edilebileceğini savunurlar:

$$G_p(s) = \frac{K}{1 + s\tau} e^{-sT} \quad [1]$$

PID kontrol için, kontrolör aşağıdaki transfer fonksiyonuna sahiptir (denklem [28], 8. Bölüm):

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad [2]$$

Ziegler ve Nichols K_p , T_i ve T_d değerlerinin, bir sistemin bir birim adıma girdiye verdiği tepkiden belirlenebilmesini (Tablo 8.2'ye bakınız) sağlamak için veya denklem [1]'de verilen transfer fonksiyonuna sahip bir sistem tahmini yapılabilmesi için bir takım kurallar oluşturdular. Şekil 11.1'deki L denklem [1]'deki zaman gecikmesi T 'yi veriyor, şekildeki T denklem [1]'deki zaman gecikmesi τ 'yi veriyor ve figürdeki M denklem [1]'deki kazanç K 'yi veriyor.



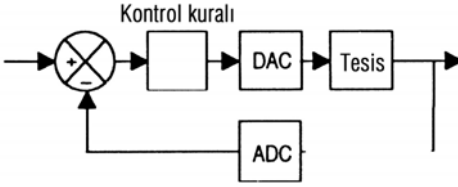
Şekil 11.1 Birim adım tepkisi

O halde, denklem [2]'yi ayrık eşdeğerine dönüştürmek için, dolayısıyla dijital kontrolör tarafından oluşturulacak algoritmayı bulmak için, 9.Bölüm'de verilen türeve ve integraller için yakınsamalar kullanabiliriz.

Sürekli zaman kuralının yakınsaması

Ziegler ve Nichols metoduna bir alternatif metod olarak, kontrolör için gerekli olan transfer fonksiyonunun, kontrol sisteminin istenilen karakteristikleri, yani gerekli yükselme miktarı ve yerleşme zamanını vermesi için düzenlenmesidir ve daha sonra transfer fonksiyonunun $G(z)$ 'ye dönüştürülmesidir. Bu daha sonra dijital bilgisayar için gerekli algoritmaya dönüştürülebilir.

Örnek olarak, Şekil 11.2'de gösterilen örneklem verili sistemi düşünün. Her örnekleme anında bilgisayar, tesis çıktısından, analog-dijital dönüştürücü (ADC) yardımıyla örnek alıyor ve örneklenmiş çıktı değerini oluşturuyor. Daha sonra bu değerler, ayrık girdi değerleri ile birlikte, bilgisayar tarafından, gerekli kontrol kurallarına göre istenilen düzeltme sinyalinin vermesi için, işleme sokuluyor ve bu sinyal tesisin sürülmesi için dijital-analog dönüştürücü yardımıyla (DAC) tesise gönderiliyor.



Şekil 11.2 Örneklem-verili kontrol sistemi

Tesisin birinci-derece, zaman gecikmesi olmayan bir sistem olduğunu varsayalım, yani:

$$G_p(s) = \frac{1}{1+s\tau} \quad [3]$$

Bu, DAC ile seri bağlıdır ve transfer fonksiyonu bir ZOH'nin transfer fonksiyonu olarak düşünülebilir, yani $(1 - e^{-Ts})/s$. Bu ikilinin darbe transfer fonksiyonu böylece aşağıdaki gibidir:

$$G(z) = \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s(1 + s\tau)} \right] \text{ 'nin } z\text{-dönüşümü}$$

$$= (1 - z^{-1}) \times \left[\frac{1}{s(1 + s\tau)} \right] \text{ 'nin } z\text{-dönüşümü}$$

$$= \frac{z-1}{z} \frac{z(1 - e^{-T/\tau})}{(z-1)(z - e^{-T/\tau})} \quad [4]$$

1 s'lik bir zaman sabiti ve 0.25 s'lik bir örneklem periyodumuz olduğunu var sayalım. O zaman:

$$G(z) = \frac{0.221}{z - 0.779} \quad [5]$$

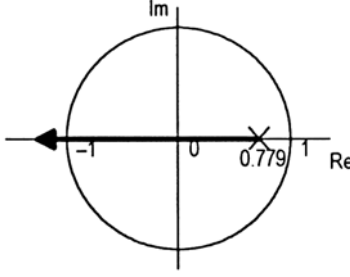
Orantılı kazancı K olan bir sürekli zaman kontrolü ile eşdeğer bir kontrolör verecek bir ayrık zamanlı kontrolör kullanmak istediğimizi düşünün. Sistemin kapalı-döngü darbe transfer fonksiyonu $T(z)$ aşağıdaki gibidir:

$$T(z) = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)} = \frac{0.221K}{z - 0.779 + 0.221K} \quad [6]$$

Sistem sadece bir kutba sahiptir ve bu kutbun yeri aşağıdaki gibidir:

$$z = 0.779 - 0.221K \quad [7]$$

K değerinin seçilmesiyle, bu kutbun z -düzleminin reel ekseninin neresinde bulunduğunu belirleyebiliriz. Şekil 11.3 kök yer eğrisini gösteriyor. Kutup, bir darbe girdisi için, 0 ile 0.79 arasında ise, sistem kararlıdır ve zamanla bozunan bir darbe serisi verir, kutup 0'da ise, $K = 0.779/0.221 = 3.52$ 'dir. Sistem kararlı olacaktır ve $T(s) = 0.779/z$ şeklinde bir darbe transfer fonksiyonuna sahiptir. Bu, sadece bir örnek gecikmeli bir sistemi tanımlar. Böylece bir darbe girdisi için, sadece bir tane örnek periyotlu gecikmiş darbe çıktısı olacaktır. Bu tip bir tepki, deadbeat (ölü vuruşlu) olarak adlandırılır. Kutup 0 ile -1 arasında ise, sistem hala kararlıdır. Buna rağmen, kutup -1'de ise, sistem marjinal olarak kararlı duruma dönüşecektir. Bu durum, $-1 = 0.779 - 0.221K$ olduğu zaman gerçekleşir ve bu nedenle $K = 8.05$ 'tir. bu değer üstündeki bir kazanç artışı, kutbun -1'in gerisine düşmesine sebep olur ve bu nedenle kararsızlıkla sonuçlanır.



Şekil 11.3 Kök yer eğrisi çizimi

Dijital kontrolör tasarımı

Herhangi bir sürekli zaman kontrolör kuralına dayanmayan bir dijital kontrolör tasarımını düşünün:

- 1 Bir birim adım girdisi için gerekli kapalı-döngü tepkisini belirleyin.
- 2 z -dönüşümünü elde edin.
- 3 Birim adım girdisi için, bu çıktıyı sağlayacak kapalı-döngü darbe transfer fonksiyonunu belirleyin.
- 4 Dolayısıyla kontrolörün darbe transfer fonksiyonunu belirleyin.

Deadbeat kontrolörü

Yukarıdakine bir örnek olarak, *ölü darbe*, *ölü vuruş* tepkisini verecek bir kontrolör tasarımını düşünelim. Bu tip bir tepki, çıktının birim adım girdisini tam olarak takip ettiği tepkidir fakat bir örneklemeye periyodu gecikmiş haldedir. Çıktı $Y(z)$ böylece aşağıdaki gibidir:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} z^{-1} = \frac{1}{z-1} \quad [8]$$

Bu çıktıyı verecek, kapalı-döngü darbe transfer fonksiyonu $T(z)$ böylece aşağıdaki gibidir:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1/(z-1)}{z/(z-1)} = \frac{1}{z} \quad [9]$$

$T(z)$ aşağıdaki gibi olduğundan:

$$T(z) = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)G(z)}$$

o zaman:

$$G_c(z) = \frac{T(z)}{[1 - T(z)]G(z)} \quad [10]$$

ve bu nedenle, denklem [9] kullanılırsa:

$$G(z) = \frac{1}{[z-1]G(z)} \quad [11]$$

Örnek olarak, eğer aşağıdaki fonksiyona sahipsek (denklem [5])'e bakınız):

$$G(z) = \frac{0.221}{z - 0.779}$$

o zaman:

$$G_c(z) = \frac{z - 0.779}{0.221(z - 1)} \quad [12]$$

Yukarıdaki örnek, örnekleme zamanları arasında istenmeyen geçici salınımlara yol açan bir kontrolör dizaynı olabilir. Örnekleme noktaları arasında sistem açık döngü çalıştığından, geçici salınımlar, sistemin açık-döngü transfer fonksiyonundan bulunabilir. Yüksek dereceli sürekli-zaman açık-döngü fonksiyonu olan, birinci-derece kapalı-döngü darbe transfer fonksiyonuna sahip bir sistem elde edebiliriz; bunun sebebi, darbe transfer fonksiyonunun kutupları ve sıfırları iptal etmesidir.

Dahlin kontrolörü

Dahlin kontrolörü, bir adım girdisine üstel bir tepki üreten deadbeat kontrolörünün bir modifikasyonudur ve bu nedenle istenmeyen geçici salınımlar yok edilerek daha düzgün bir tepki verir. Sistemin bir birim adım girdisine verdiği tepki böylece, a bir sabit olmak üzere, $y(t) = (1 - e^{at})'$ dir. Böylece:

$$Y(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z - e^{-aT})(z - 1)} \quad [13]$$

Kapalı-döngü darbe transfer fonksiyonu böylece aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-e^{-aT})(z-1)} \frac{z-1}{z} \\ &= \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}} \end{aligned} \quad [14]$$

$T(z)$ aşağıdaki gibi olduğundan:

$$T(z) = \frac{G_c(z)G(z)}{1+G_c(z)G(z)}$$

o zaman:

$$G_c(z) = \frac{T(z)}{[1-T(z)]G(z)} \quad [15]$$

ve bu nedenle:

$$G_c(z) = \frac{1-e^{-aT}}{[z-1]G(z)} \quad [16]$$

Kalman kontrolörü

Kalman kontrolörü, deadbeat kontrolörünün bir başka modifikasyonudur. Kalman, eğer bir sistemin derecesi birden büyükse ve sistemin bir örnekleme aralığında yerleşmesinin mümkün olmadığı durumlarda; sistemin daha büyük fakat sonlu sayıda aralıklarda yerleştirilebilmesinin mümkün olduğunu ve gerekli olan aralık sayısı sistemin derecesine eşit olduğunu söyler. Aşağıdaki gibi bir birim adım girdisi olduğunu düşünün:

$$X(z) = z/(z-1) = 1/(1-z^{-1}) \quad [17]$$

İkinci-derece bir sistem düşünün, gerekli tepki $Y(z)$, iki ardışık örnekleme aralığından sonra birim değere ulaşan bir tepkidir. Böylece, bu tepki 0'da başlayacak, bir örnekleme aralığından sonra bir a değerine ulaşacak ve iki örnekleme aralığından sonra birim değere ulaşacaktır, böylece,

$$Y(z) = 0 + az^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \dots \quad [18]$$

Kapalı-döngü transfer fonksiyonu böylece denklem [17] ve [18]'le verildiği gibi olacaktır:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = (1-z^{-1})(az^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) \quad [19]$$

$$\begin{aligned} &= az^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots - az^{-2} - z^{-3} - z^{-4} - \dots \\ &= az^{-1} + (1-a)z^{-2} \end{aligned} \quad [20]$$

Kontrolör çıktısı $U(z)$ aşağıdaki gibi olmalıdır:

$$U(z) = \beta + \gamma z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \quad [21]$$

Denklem [17] ve [21], aşağıdaki denklemi verir:

$$\begin{aligned} \frac{U(z)}{X(z)} &= (1 - z^{-1})(\beta + \gamma z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) \\ &= \beta + \gamma z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots - \beta z^{-1} - \gamma z^{-2} - z^{-3} - \dots = \beta + (\gamma - \beta)z^{-1} + (1 - \gamma)z^{-2} \end{aligned} \quad [22]$$

Bunu $Q(z)$ olarak gösterelim. Açık-döngü transfer fonksiyonu veya tesisin transfer fonksiyonu, birim geri beslemeli olduğunda, aşağıdaki gibidir:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{T(z)}{Q(z)} \quad [23]$$

$$= \frac{az^{-1} + (1-a)z^{-2}}{\beta + (\gamma - \beta)z^{-1} + (1 - \gamma)z^{-2}} \quad [24]$$

a , β ve γ değerleri böylece denklem [24]'teki katsayılarla tesisin gerçek darbe transfer fonksiyonundaki katsayılar karşılaştırılarak belirlenebilir. Denklem [24]'ün pay payındaki katsayıların bir olduğuna dikkat edin ve böylece, gerçek darbe transfer fonksiyonu uygun bir faktörle ölçeklendirilmelidir, böylece bu katsayılar da bire eşitlenmelidir. Örnek olarak, aşağıdaki darbe transfer fonksiyonuna sahip birim geri beslemeli bir sistem düşünün:

$$G(z) = \frac{0.5 + 0.22z}{(z - 0.1)(z - 0.2)}$$

Bu denklem, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$G(z) = \frac{0.5 + 0.22z}{z^2 - 0.3z + 0.02} = \frac{0.22z^{-1} + 0.5z^{-2}}{z^{-2}(z^2 - 0.3z + 0.02)}$$

Katsayılar, pay katsayılarının toplamının tersiyle çarpımı yapılarak ölçeklendirilmelidir; yani $1/0.72$. Böylece:

$$G(z) = \frac{0.305z^{-1} + 0.695z^{-2}}{1.39 - 0.417z^{-1} + 0.028z^{-2}}$$

Denklem [24] ile karşılaştırıldığında, $\alpha = 0.305$, $\beta = 1.39$ ve $\gamma = 0.972$ 'dir. $T(z)$, aşağıdaki gibi olduğundan:

$$T(z) = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)G(z)}$$

o zaman:

$$G_c(z) = \frac{T(z)}{[1-T(z)]G(z)} \quad [25]$$

ve bu nedenle:

$$G_c(z) = \frac{T(z)Q(z)}{[1-T(z)]T(z)} = \frac{Q(z)}{1-T(z)} \quad [26]$$

$$= \frac{\beta + (\gamma - \beta)z^{-1} + (1 - \gamma)z^{-2}}{1 - \alpha z^{-1} - (1 - \alpha)z^{-2}} \quad [27]$$

Dolayısıyla, yukarıdaki örnek için:

$$G_c(z) = \frac{1.39 - 0.417z^{-1} + 0.028z^{-2}}{1 - 0.0305z^{-1} - 0.695z^{-2}} \text{ dir}$$

Ayrık kontrolör transfer fonksiyonlarının programa çevrilmesi

Ayrık kontrolör darbe transfer fonksiyonu sabit çarpanlar ve birim gecikmeler içeren bir fark denklemine dönüştürülmelidir; fark denklemi, daha sonra programa dönüştürülebilir (9.bölümü bunu örnekliyor). Özel bir transfer fonksiyonu bir takım alternatif gösterime sahip olabilir. Kullanılabilecek metotlar aşağıdaki gibidir:

1 *Direk Metot*

z^{-1} 'de iki polinomun oranı şeklinde ifade edilebilen kontrolör girdisi $Y(z)$ ve çıktısı $E(z)$ aşağıdaki gibi oranlanabilir:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{j=0}^n a_j z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^n b_j z^{-j}} \quad [28]$$

Eğer, denklem [28]'i düzenlersek, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$Y(z) \left(1 + \sum_{j=1}^n b_j z^{-j} \right) = E(z) \left(\sum_{j=0}^n a_j z^{-j} \right)$$

$$Y(z) = E(z) \left(\sum_{j=0}^n a_j z^{-j} \right) - Y(z) \left(\sum_{j=1}^n b_j z^{-j} \right)$$

ve dolayısıyla aşağıdaki fark denklemi elde edilir:

$$y_i = \sum_{j=0}^n a_j e_{i-j} - \sum_{j=1}^n b_j y_{i-j} \quad [29]$$

Örnek olarak, aşağıdaki fonksiyona sahipsek:

$$G_c(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Direk metodunu uygularsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$Y(z)(1-z^{-1}) = E(z)$$

$$Y(z) = E(z) + z^{-1}Y(z)$$

ve bu nedenle, z^{-1} ile çarpmak, birim zaman gecikmesi demek olduğundan, fark denklemi aşağıdaki biçime dönüşür:

$$y_i = e_i + y_{i-1}$$

Daha ileri bir örnek için, elimizde aşağıdaki fonksiyon varsa:

$$G_c(z) = \frac{1.39 - 0.417z^{-1} + 0.028z^{-2}}{1 - 0.305z^{-1} - 0.695z^{-2}}$$

denklem [29] uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$y_i = 1.39e_i - 0.417e_{i-1} + 0.028e_{i-2} + 0.305y_{i-1} + 0.695y_{i-2}$$

2 Ara değişkenle direk metot

z^{-1} 'de iki polinomun oranı şeklinde ifade edilebilen kontrolör girdisi $Y(z)$ ve çıktısı $E(z)$ aşağıdaki gibi oranlanabilir:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{j=0}^n a_j z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^n b_j z^{-j}} \quad [30]$$

$P(z)$ gibi yardımcı bir değişkeni aşağıdaki gibi yazarsak:

$$\frac{Y(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^n a_j z^{-j} \quad [31]$$

Denklem [30], aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{P(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^n b_j z^{-j}} \quad [32]$$

Denklem [31]'de verilen fark denklemi, aşağıdaki gibidir:

$$y_i = \sum_{j=0}^n a_j p_{i-j} \quad [33]$$

ve denklem [32] ile, aşağıdaki elde edilir:

$$p_i = e_i - \sum_{j=1}^n b_j p_{i-j} \quad [34]$$

Örnek olarak, eğer aşağıdaki fonksiyona sahipsek:

$$G_c(z) = \frac{1.39 - 0.417z^{-1} + 0.028z^{-2}}{1 - 0.305z^{-1} - 0.695z^{-2}}$$

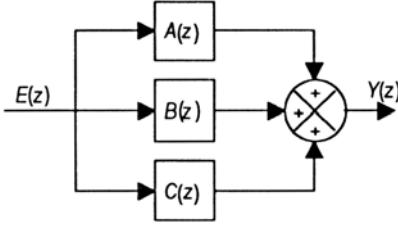
iki fark denklemi aşağıdaki gibidir:

$$y_i = 1.39p_i - 0.417p_{i-1} + 0.028p_{i-2}$$

$$p_i = e_i - 0.305p_{i-1} - 0.695p_{i-2}$$

3 Paralel metodu

Bu metotla, darbe transfer fonksiyonu, kısmi kesirlerine ayrılır ve her bir kesir için fark denklemi bulunur. Bu fark denklemleri, toplam çıktının, her bir daldan gelen çıktının toplanmasıyla elde edildiği ağına paralel kollarına karşılık gelir. Böylece, eğer $G_c(z)$ için, $A(z)$, $B(z)$ ve $C(z)$ kısmi kesirlerine sahipsek; ağ, Şekil 11.4'te verildiği gibidir.



Şekil 11.4 Paralel Ağ

Örnek olarak, aşağıdaki darbe transfer fonksiyonuna sahip bir kontrolör düşünün:

$$G_c(z) = \frac{1 + 1.4z^{-1}}{(1 - 0.4z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})}$$

Bu fonksiyon aşağıdaki kısmi kesirleri verir:

$$G_c(z) = \frac{2}{1 - 0.4z^{-1}} - \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}}$$

ve dolayısıyla fark denklemleri aşağıdaki gibidir:

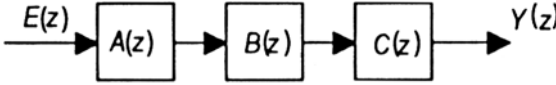
$$a_1 = 2e_1 + 0.4a_{i-1}$$

$$b_1 = -e_1 + 0.5b_{i-1}$$

$$y_i = a_i + b_i$$

4 Seri metodu

Eğer, darbe transfer fonksiyonu, bileşenlerine ayrılırsa, bu fonksiyon birbirine seri bir sıra elemanlarla gösterilebilir, çoğunlukla bu gösterim, kaskat olarak tanımlanır. Böylece, eğer, $G_c(z) = A(z)B(z)C(z)$ ise, $G_c(z)$ 'yi ifade eden ağ, Şekil 11.5'te gösterildiği gibidir.



Şekil 11.5 Seri ağ

Örnek olarak, aşağıdaki darbe transfer fonksiyonuna sahip bir kontrolör düşünelim:

$$G_c(z) = \frac{4(1 + z^{-1})}{(1 + 0.5z^{-1})(1 + 0.4z^{-1})}$$

Bunu, dört seri eleman olarak düşünebiliriz:

$$a(z) = 4$$

$$B(z) = 1 + z^{-1}$$

$$C(z) = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}}$$

$$D(z) = \frac{1}{1 + 0.4z^{-1}}$$

a , b , c ve d , bu blokların çıktıları ise, kontrolör girdisi e ve kontrolör girdisi y ile bu denklemler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$a_i = 4e_i$$

$$b_i = a_i + a_{i-1}$$

$$c_i = b_i - 0.5c_{i-1}$$

$$d_i = c_i - 0.4d_{i-1} \text{ veya } y_i = c_i - 0.4y_{i-1}$$

Örnekleme aralığının seçimi

Uzun bir örnekleme aralığı seçmek demek, ölçümler arasındaki zaman arttığından, ölçümleme yükünün azaltılması anlamına gelir. Bu, aynı zamanda hızlı bir analog-dijital dönüştürücü gereksinimini

azaltır. Buna rağmen, örnekleme aralığındaki bir artış, örnekler arasındaki boşlukta işleme sokulmayan girdi değişimleri olabileceğinden dolayı, kararsızlığa, bilgi kaybına ve sistemin algoritmasında doğruluk kaybına yol açabilir. Sürekli zaman formundan elde edilen bir kontrol algoritmasında, örnekler arasındaki zaman, ne kadar büyükse, ayrık örneklerin sürekli zaman formunu tekrar etmesinin doğruluğu o kadar az olur.

Eğer örnekleme aralığı, azaltılırsa ve çok küçük yapılırsa, komşu örnekler arasındaki fark, çok küçük olur. Buna rağmen dijital sistemler, sonlu sayıda bir kelime uzunluğuna sahiptir ve bu nedenle ve sinyalin çözümlenebileceği fark için bir limit vardır. Böylece, eğer örnekleme aralığının azaltılmasının yararlı etkileri düşünülürse, dijital sistemin kelime uzunluğunu arttırmak gerekir.

Örnekleme aralığını belirlemek için deneysel kurallar

Örnekleme aralığını belirlemek için, kullanılan deneysel kurallar aşağıdaki gibidir:

1 *Dominant tesis zaman sabiti*

Örnekleme aralığı, baskın tesis zaman katsayısının onda biri büyüklüğünde seçilir.

2 *Ziegler-Nichols tesis modeli varsayımı*

T zaman gecikmesi ve τ zaman sabit olmak üzere, tesisin aşağıdaki açık-döngü transfer fonksiyonuna sahip olduğu düşünülür:

$$G(s) = \frac{e^{-sT}}{1 + s\tau}$$

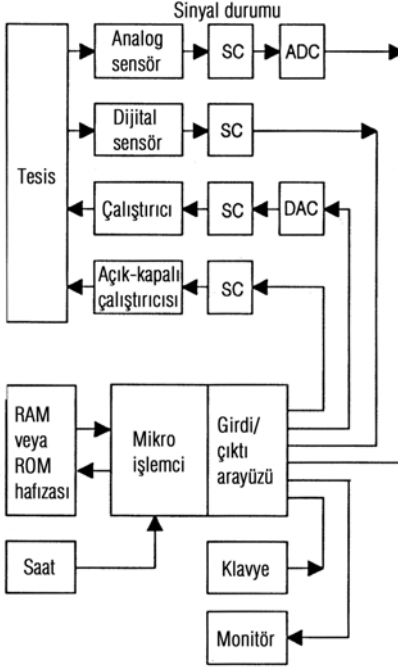
Genelde, örnekleme periyodunun $0.05T$ ve $0.03T$ arasında olması önerilir ve çoğunlukla $0.25T$ kullanılır.

3 *Kapalı-döngü performans gereklilikleri*

Eğer, kapalı-döngü bir kontrol sistemin yerleşme zamanının T_s olması isteniyorsa, örnekleme aralığı $T_s/10$ 'dan küçük olmalıdır. Eğer sistemin doğal frekansının ω_n olması isteniyorsa, örnekleme aralığı $2\pi/10 \omega_n$ 'den büyük olmalıdır, yani örnekleme frekansı doğal frekanstan 10 kat büyük olmalıdır.

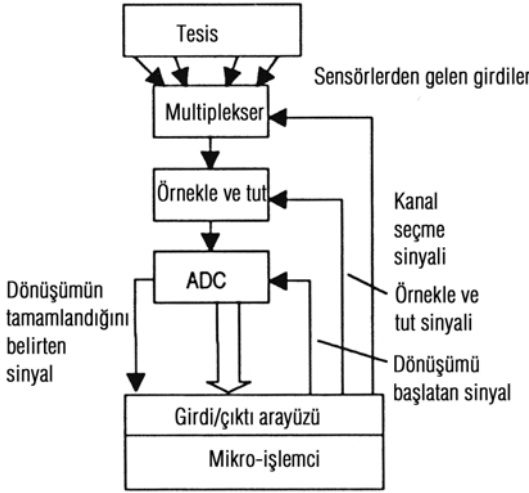
Kontrol döngüsündeki mikroişlemci

Şekil 11.6, kontrolör için bir mikroişlemci kullanıldığı bir tesis kontrol sisteminin temel özelliklerini gösteriyor.



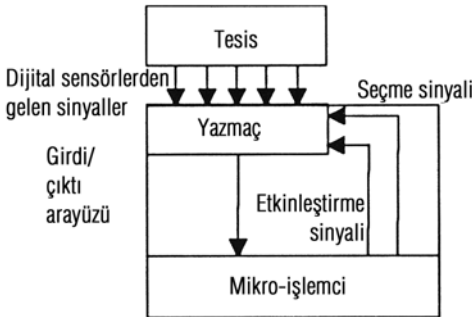
Şekil 11.6 Bir mikroişlemci içeren kontrol döngüsü

Sensörler, termokuplör (ısılıçift), voltmetre (gerilimölçer), sıcaklık resistans (direnç) elemanları tarzında gözlenen değişkenin büyüklüğüne bağlı sinyal veren bir aygıttır. Bu tip aygıtlar için sinyal koşulu bir işlemsel amplifikatörle oluşturulan Wheatstone köprüsü gibi bir devredir. Sinyaller analogtan dijitale ADC ile dönüştürülmelidir. Birden fazla sensör bulunduğu zaman, ayrı bir ADC kullanmak yerine bir çoklama/multipleks kullanmak daha uygundur ve böylece, çoklayıcı/multiplekser'in girdi kanalları, ADC'ye sinyal verecek biçimde seçilir. Şekil 11.7, bu işlemin temel yapılandırmasını gösteriyor.



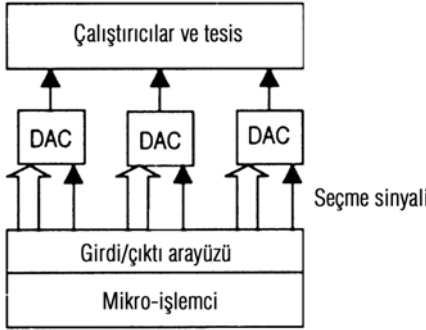
Şekil 11.7 Analog girdi sistemi

Bazı sensörler açık veya kapalı olan devre anahtarı olabilir. Bu durumda, sinyaller, mikroişlemci tarafından seçilmeden önce içinde depolandığı bir yazmaca gönderilmelidir. Şekil 11.8, bu düzenlemeyi gösteriyor.

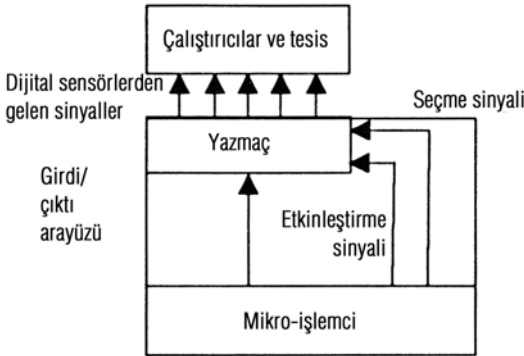


Şekil 11.8 Dijital girdi sistemi

Analog çalıştırıcılar kullanıldığında, yani motor veya ısıtma elemanı, mikroişlemci çıktısı dijital olduğundan, çıktıyı analoğa dönüştürmek için bir DAC kullanılmalıdır. Daha sonra sinyal koşullaması olarak, çalıştırıcıyı işletmek için, belki, analog sinyal yeterli biçimde yükseltgenebilir. Şekil 11.9 analog çalıştırıcı sistemlerin temel elemanlarını gösteriyor. Çalıştırıcılar, yani röleler, kullanıldığı zaman, sistemin temel formu Şekil 11.10'da gösterildiği gibidir.



Şekil 11.9 Analog çıktı sistemi

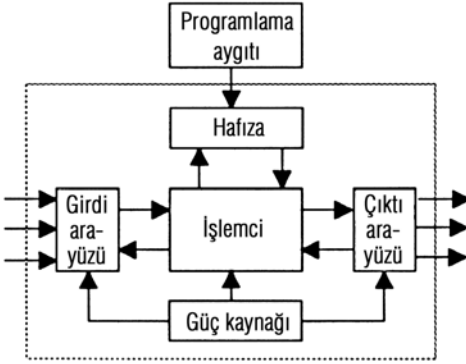


Şekil 11.10 Dijital çıktı sistemi

Programlanabilir lojik/mantık kontrolörleri

Programlanabilir mantık kontrolörleri (PLC), komutları depolamak ve tesisi kontrol etmede, mantık, sıralama, zamanlama, sayma ve aritmetik gibi fonksiyonların uygulaması için programlanabilir bir hafıza kullanan mikroişlemci-tabanlı bir kontrolördür. Mantık ve devre anahtarı işlemleri uygulamalarında, programlama temel alındığından, mantık terimi kullanılmıştır.

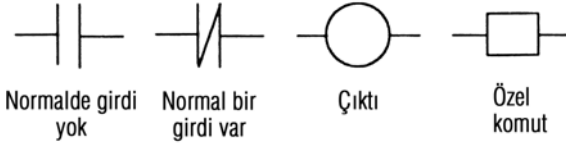
Örnekleme amacıyla: A girişi açıldığında, A çıkışından sinyal alınacaktır; A veya B girişi açıldığında, B çıkışı gözlenir; A girişi açıldığında, A çıkışı kapanmadan önce 10 s'liğine açılır; A çıkışı 10 defa açıldığında; A çıkışı gözlenir gibi kontrol işlemlerini gerçekleştirmek için kullanılır. Şekil 11.11 bir PLC sisteminin temel formunu gösteriyor.



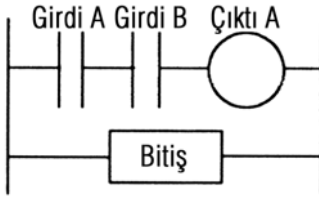
Şekil 11.11 PLC sistemi

PLC'leri programlamada yaygın olarak kullanılan metod, ladder (merdiven) diyagramlarını kullanmaktır. Bir program yazmak, paralel güç hatları arasında, her biri kontrol operasyonunun bir işlemini belirtmek üzere, merdiven şebekesi basamaklarında yer alan bir dizi devre anahtarı için devre çizmekle eşdeğerdir. PLC, bu basamakları, soldan sağa okur ve baştan sona inceler. En alt uçtaki basamağa geldiğinde, merdiven şebekesinin en üstüne geri döner. Her bir basamak, bir girdi veya girdilerle başlar ve en azından bir çıktıyla sona erer. Girdilerin, çift bağlantılarla gösterildiği düşünülebilir ve normal konumlarında gösterilirler. Bu nedenle bir giriş, normalde kapalı olan bir giriş, açık bağlantıyla gösterilebilir ve

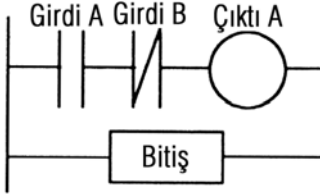
normalde açık olan bir giriş de kapalı bağlantılarla gösterilebilir. Şekil 11.12 kullanılan temel sembolleri gösteriyor.



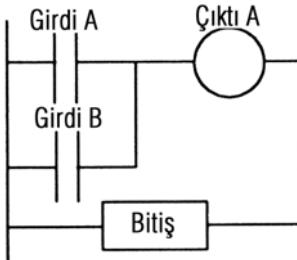
Şekil 11.12 Temel merdiven şebeke program sembolleri



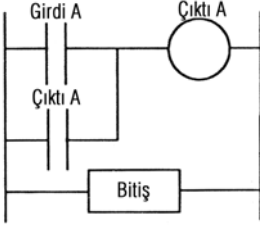
Şekil 11.13 Çıktı, A ve B girişi açıldığında oluşur.



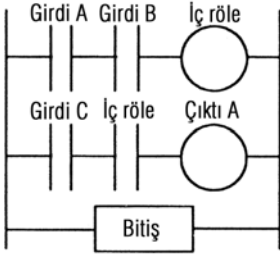
Şekil 11.14 Çıktı, A girdisi açıldığında, B girdisi kapandığında oluşur.



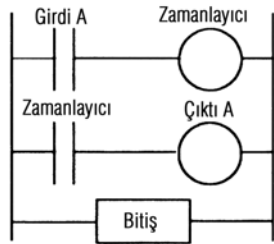
Şekil 11.15 Çıktı, A veya B girdilerinden biri açıldığında oluşur.



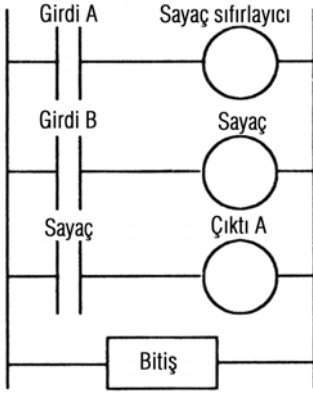
Şekil 11.16 A girdisi, geçici olarak açıldığında, A çıkışı oluşur ve kendisiyle ilgili bağlantıları açar; bu nedenle sonuçta girdiyi kilitleyerek A girdisi kapatılsa bile çıkış açık kalır



Şekil 11.17 IR bir iç röle olarak görev yapar. Böylece, A ve B girdisi açıldığında; ara röle açılır. Bunun sonucunda, rölenin ilgili bağlantıları kapanır ve C girdisi açıldığı zaman, A çıkışından bir çıktı gözlenir.



Şekil 11.18 A Girdisi açıldığında, zamanlayıcı çalışmaya başlar. Zamanlayıcının önceden ayarlanan zamanı dolduğunda, zamanlayıcı bağlantıları kapanır ve A çıkışından sinyal alınır.



Şekil 11.19 *A girişi açıldığında, sayaç sıfırlanır. B girişi açıldığında, sayaç saymaya başlar. Sayaç, önceden ayarlandığı değere geldiğinde sayaç bağlantıları kapanır ve A çıktısı gözlenir.*

12. SİSTEM DURUM MODELLERİ

Matris notasyon ve terminolojisi

Bir *matris*, dikdörtgen biçiminde, satır ve sütunlardan oluşan sayı dizisidir. Elemanlar ve matris arasında aritmetik bir bağlantı yoktur ve bir bütün olarak, matris, nümerik bir değere sahip değildir. Diziler köşeli [] parantez içine yazılır. Bir matrisin boyutu, içerdiği satır ve sütun sayısına göre belirlenir, p satır ve q sütuna sahip bir dizinin boyutu $p \times q$ matrisi olarak tanımlanır. Aynı satır ve sütun sayısına sahip bir matris, yani:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

kare matris olarak tanımlanır; kare matrisler için kuvvet terimi çoğunlukla sütun sayısı olarak kullanılır. Sadece bir sütuna ve birden fazla satıra sahip bir matris, yani:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

sütun matrisi veya *sütun vektörü* olarak tanımlanır. Sadece bir satıra sahip bir matris, yani:

$$[2 \ 5]$$

satır matrisi veya *satır vektörü* olarak tanımlanır.

Genelde, satır ve sütun vektörlerini göstermek için küçük harfler kullanılmasına rağmen, matrisleri belirtmek için kalın büyük harfler kullanılır. Kalın olmayan küçük harfler, matrislerin girdilerini; girdinin matristeki yerini belirtmek için alt son ekle birlikte kullanılır, sonekler girdinin bulunduğu satır ve sütun yerini belirtir, yani:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Ana köşegen, matrisin sol üst köşesinden başlar ve köşegen boyunca aşağıya sağa doğru devam eder. Ana köşegen elemanları *köşegen elemanları* olarak tanımlanır ve böylece, yukarıdaki matriste bu elemanlar, a_{11} , a_{22} , a_{33} ve a_{44} 'tür.

Birim matris veya *özdeş matris* terimi sembol **I** ile gösterilir ve ana köşegen üzerindeki bütün girdileri 1'dir ve diğer bütün girdileri 0'dır, yani:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

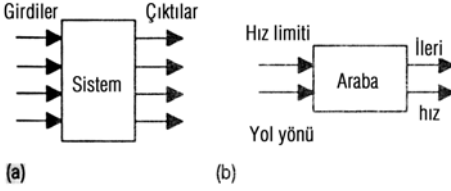
Bir *sıfır matrisi*, sembol **0**, bütün girdileri sıfır olan matristir , yani:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Durum uzayı modeli

Bir sistemin transfer fonksiyonu sistemin başlangıç değerleri sıfır olduğu zamanki girdi ve çıktıları ilişkilendirir ve bir sistem girdisi ve bir sistem çıktısı olması esasına dayanır. Bir durum uzayı modeli, sistem girdi ve çıktısı arasındaki ilişki yerine; sistemin ara durumlarını modeller ve çoklu girdi ve çıktıya sahip başlangıç değeri sıfır olmayan sistemler ile ilgilenir. Durum değişkenleri, sistemin anlık durumunu, durum değişkenleri arasındaki ilişkiyi tanımlamada durum denklemlerini kullanarak, tanımlamak için kullanılır. Durum değişkenleri tek değildir; buna rağmen, çoğunlukla el altındaki probleme ilişkin durum değişkenleri alınır, yani çıktı ve çıktının türevleri. Bir sistemi modellemek için gerekli durum değişkenlerinin ve durum denklemlerinin sayısı sistemin kuvvetine eşittir.

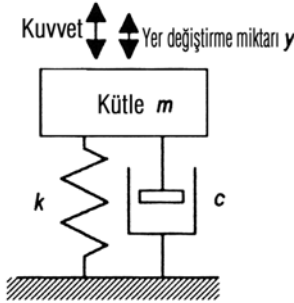
Şekil 12.1(a) çok değişkenli sistem prensibini gösteriyor ve Şekil 12.1(b), bunu bir yol üzerinde hareket eden araba ile örnekliyor. İki girdi gösterilmiştir: yolda takip edilen yön ve hız limiti ve iki çıktı bulunmaktadır: arabanın kat ettiği yön ve hızı.



Şekil 12.1 Çok değişkenli sistemler

Durum denklemleri

Genelde, n 'inci dereceden bir diferansiyel denklem, n tane birinci derece diferansiyel denkleme ayrılabilir.



Şekil 13.2 Yay-amortisör-kütle sistemi

Bir yay-amortisör-kütle sistemi için yazılan ikinci-derece diferansiyel denklemini düşünün (denklem [12]-Şekil12.2):

$$F - ky - c \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad [1]$$

İki değişken daha seçtiğimizi varsayalım, x_1 ve x_2 , yer değişim miktarı çıktısı ve diğeri, çıktının birinci-derece türevi, yani çıktının hızı:

$$x_1 = y \text{ ve } x_2 = \frac{dy}{dt} \quad [2]$$

Seçilen değişkenleri diferansiyel denklemde yerine koyarsak, yeni değişkenlere sahip bir denklem elde edilir:

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{F}{m} \quad [3]$$

ve denklem [2] yardımıyla aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad [4]$$

ikinci-derece diferansiyel denklem [1], böylece iki tane eş zamanlı birinci-derece denklem [3] ve [4] ile yer değiştirdi; birinci-derece denklemler, *durum denklemleridir* ve bu denklemle ilişkilendirilen iki değişken x_1 ve x_2 *durum değişkenleridir*. Benzer biçimde üçüncü-derece diferansiyel denklem, üç tane bir diferansiyel denklemle, dördüncü-derece bir diferansiyel denklem, dört tane birinci-derece diferansiyel denklemle ifade edilebilir.

İkinci-derece bir diferansiyel denklem yerine geçen iki durum denklemi [3] ve [4], matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F \quad [5]$$

ve bu matris durum denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad [6]$$

x durum vektörü ve $u(t)$ sistem girdisi, bu durumda kuvvet F , olarak adlandırılır. **A** durum matrisidir ve **B** girdi matrisidir.

Çıktı denklemleri terimi, çıktı değişkeninin durum değişkenleri, girdiler ve olası zaman ile cebirsel olarak ifade edilmesi durumu için kullanılır. Genelde, bir sistem çıktısı, durum vektörleri ve girdilere bağlı bir fonksiyondur ve aşağıdaki forma sahip bir matris, çıktı denklemi ile ifade edilir:

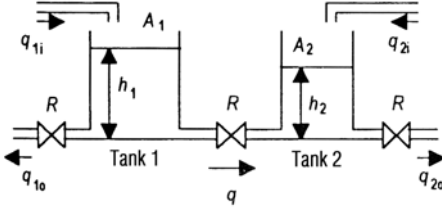
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad [7]$$

C *çıktı matrisi* olarak, **D** *direk geçiş matrisi* olarak adlandırılır. **D**, sistem girdisi ve sistem çıktısı arasında direk bir ilişki verir ve çoğunlukla sıfır matrisine eşittir; yani bütün elemanları sıfırdır. Yukarıdaki örnek için, matris çıktı denklemi aşağıdaki gibidir:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad [8]$$

ve dolayısıyla, $y = x_1$ 'dir, çıktı matrisi $C \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ 'dır ve direk aktarım matrisi, sıfır matrisidir.

Durum denklemlerinin geliştirilmesine yönelik daha ileri bir örnek için, Şekil 12.3'te gösterilen hidrolik sistemini düşünün:



Şekil 12.3 Hidrolik sistem

İki-girdili ve iki-çıkıtlı bir sisteme sahibiz. Tank 1 için:

$$q_{1i} - q_{1o} - q = A_1 \frac{dh_1}{dt} \quad [9]$$

$$\rho g h_1 = q_{1o} R \quad [10]$$

ve aşağıdaki denklem ile

$$\rho g h_1 - \rho g h_2 = q R \quad [11]$$

Tank 2 için,

$$q_{2i} + q - q_{2o} = A_2 \frac{dh_2}{dt} \quad [12]$$

$$\rho g h_2 = q_{2o} R \quad [13]$$

denklem [10]'daki q_{1o} 'yu ve denklem [11]'deki q 'yu denklem [9]'da yerine koyarsak, aşağıdaki durum denklemini elde ederiz.

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{2\rho g}{RA_1} h_1 + \frac{\rho g}{RA_1} h_2 + \frac{q_{1i}}{A_1} \quad [14]$$

Benzer biçimde, ikinci durum denklemini elde etmek için denklem [12]'yi kullanabiliriz:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{\rho g}{RA_2} h_1 - \frac{2\rho g}{RA_2} h_2 + \frac{q_{2i}}{A_2} \quad [15]$$

Denklem [14] ve [15]'i matris denklemi olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\rho g}{RA_1} & \frac{\rho g}{RA_1} \\ \frac{\rho g}{RA_2} & -\frac{2\rho g}{RA_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1i} & q_{2i} \end{bmatrix} \quad [16]$$

Denklem [10] ve denklem [13] çıktı denklemlerini verir ve dolayısıyla:

$$\begin{bmatrix} q_{1o} \\ q_{2o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho g}{R} & 0 \\ 0 & \frac{\rho g}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad [17]$$

Durum denklemleri bir bilgisayarla, standart matris metodları kullanılarak çözülebilir ve daha sonra, çıktı denklemleri farklı çıktılar elde etmeyi kolaylaştırır.

Matris aritmetiği

1 Toplama

Eğer **A** ve **B** matrisleri aynı boyutta ise, **A + B** toplam matrisi, iki matristeki ilgili girdilerin toplanmasıyla elde edilir. Farklı boyutlardaki matrisler toplanamaz. Örnek olarak, eğer:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ise:

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} 2-1 & 5+4 & -1+0 \\ 0+2 & 4+4 & 2+3 \\ 3-3 & 1+3 & -6+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 2 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2 Bir sabitle çarpma

Eğer $\mathbf{A}$ herhangi bir matris ve c bir sabitse; $c\mathbf{A}$ çarpımı $\mathbf{A}$ 'nın her bir girdisinin c ile çarpılmasıyla elde edilir.

3 İki matrisin çarpımı

Genelde çarpım prosedürü şu şekilde ifade edilir: Eğer $\mathbf{A}$ $m \times r$ 'lik matris ise ve $\mathbf{B}$ $r \times n$ 'lik matris ise, çarpım $\mathbf{AB}$ $m \times n$ 'lik bir matristir. Bu çarpım, $\mathbf{A}$ 'nın i satırındaki girdilerle, $\mathbf{B}$ 'nin ilgili j sütunundaki girdilerinin, çarpılması ve toplanması yoluyla, çarpımın i satırı ve j sütunundaki girdisi elde edilir.

Böylece örnek olarak, aşağıdaki matrisler için:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & b_{13} \\ \cdot & \cdot & b_{23} \\ \cdot & \cdot & b_{13} \end{bmatrix}$$

$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$ olmak üzere, aşağıdaki girdiyi veren bir çarpım vardır:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

iki matrisin çarpımının mümkün olabilmesi için, birinci matrisin sütun sayısının ikinci matrisin satır sayısına eşit olması gerekir. Eğer bu sağlanmıyorsa, iki matrisin çarpımı tanımsızdır.

Matris çarpımını örneklemek için, $\mathbf{AB}$ çarpımını düşünün:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

O zaman:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4 Matrislerin kuvvetleri

$\mathbf{A}^2$ matrisi, $\mathbf{AA}$ çarpımını ifade eder. Benzer biçimde $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{AAA}$ çarpımını belirtir. Diğer matrislerde çarpım mümkün olmadığından sadece kare matrislerin kuvvetlerini elde edebiliriz, yani satır sayısının sütun sayısına eşit olduğu matrisler.

5 Birim matrisle çarpım

Bir kare matrisinin aynı boyutta bir birim matrisle çarpımı, matris cebirinde, bilinen cebirde 1 ile çarpmakla aynıdır.

$$AI = IA = A \quad [18]$$

Örnek olarak, eğer aşağıdaki matrise sahipsek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

o zaman:

$$\begin{aligned} AI &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

Bir matrisin tersi

Eğer aşağıdaki matrise sahipsek:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ve:

$$Ax = c \quad [19]$$

o zaman:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

bilinen sayısal cebirle, eğer $ax = c$ ise, x 'i, sıfırla bölüm tanımsız olduğundan a sıfır olmamak koşuluyla, $x = x/a = (1/a)c = a^{-1}c$ 'yi bularak, elde edebiliriz. Gerçekte yaptığımız şey, denklemin her iki tarafını a^{-1} ile çarpmaktır, yani $a^{-1}ax = a^{-1}xc$, $a^{-1}xa = 1$ olduğundan, $x = a^{-1}c$ 'dir. a^{-1} 'i elde etmek için, a 'nın tersini aldık ve bu nedenle a^{-1} 'in a 'nın tersi olduğunu söyleyebiliriz ve $a^{-1}xa = 1$ olarak tanımlanır. Matrislerde benzer biçimde bir prosedür uyarlayabiliriz. Denklem [19]'un her iki tarafını, A^{-1} ile gösterilen, matris A 'nın tersi ile çarparsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}c$$

Bir matrisin tersini, bilinen cebir yöntemine benzer biçimde, **I** birim matris olmak üzere tanımladık, yani:

$$A^{-1}A = I \quad [20]$$

Böylece, $xI = x$ olduğundan:

$$x = A^{-1}c \quad [21]$$

x matrisini elde etmek için, **c** matrisini **A**'nın tersi ile çarpmamız gerekiyor.

Aşağıdaki matrisi düşünün:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ve tersini düşünün:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

O zaman aşağıdaki denkleme sahip olmamız gerekiyor:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve bu nedenle:

$$\begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerin eşit olması için, aşağıdaki denklem sağlanmalıdır:

$$ap + br = 1, aq + bs = 0, cp + dr = 0, cq + ds = 1$$

Üçüncü denklem $r = -cp/d$ 'yi verir ve bunu birinci denklemde yerine koyarsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$p = \frac{d}{ad - bc}$$

ve:

$$r = -\frac{cp}{d} = -\frac{b}{ad - bc}$$

İkinci denklem $s = -aq/b$ 'yi verir ve bunu dördüncü denklemde yerine koyarsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$q = -\frac{b}{ad - bc}$$

ve:

$$s = -\frac{aq}{b} = \frac{a}{ad-bc}$$

Böylece, bu matrisin tersi, aşağıdaki gibidir:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$1/(ad - bc)$ faktörünü matrisin dışına alırsak, denklem [22]'deki matris, aşağıdaki ters matrisi verir:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad [23]$$

$ad - bc$ terimi matrisin determinantı olarak bilinir. Ters böylece, a ve d 'nin yer değiştirmesi ve b ve c 'nin işaret değiştirmesiyle ve bu denklemin $(ad - bc)$ faktörüne bölünmesiyle elde edilir. Bir matrisin her zaman tersi olmayabilir.

Lineer denklemleri çözmek için matrislerin terisinin kullanımı

Matrisin tersi, bir lineer denklem setinin çözülmesine olanak sağlayacak bir metod sağlar. Örnek olarak, eğer aşağıdaki eş zamanlı denklemlere sahipsek:

$$2x + y = 3 \quad \text{ve} \quad x + 4y = 1$$

bunları matris formunda aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ formunda bir denklemdir ve bunun için $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$ yazabiliriz. Aşağıda, matrisin tersi verildiğinden:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{in tersi} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

o zaman:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şimdi iki matrisin çarpımına sahibiz. Böylece:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \times 3 - 1 \times 1 \\ -1 \times 3 + 2 \times 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ve bu nedenle $x = 11/7$ ve $y = -1/7$ 'dir.

Determinantlar

İki eş zamanlı denklem düşünersek:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \quad \text{ve} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \quad [24]$$

bunları $x = A^{-1}c$ çözümüne sahip bir denklem olarak, $Ax = c$ şeklinde gösterebiliriz. Katsayı matrisi A 'nın tersi, 2×2 'lik bir matristir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{in tersi} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad [25]$$

Çarpan faktörünün paydası, yani $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, *matrisin determinanı* olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibidir:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad [26]$$

Eğer, aşağıdaki gibi, üç tane eş zamanlı denkleme sahipsek:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1, & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \\ \text{ve } a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3 \end{aligned} \quad [27]$$

o zaman katsayı matrisi A aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Bu terimleri bir kaç farklı yoldan düzenleyebiliriz. Örnek olarak, ilk satır terimlerini çıkartırsak, aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{13} - a_{33}a_{21}a_{12} \quad [28]$$

Parantez içindeki değerler, 2×2 'lik bir determinanttır. Böylece, denklem, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Denklem [29], ilk satırdaki her bir elemanın 2×2 'lik bir determinantla çarpımını içerir, bu determinantlar A 'nın determinantından, ilk satır ve sütunun silinmesiyle elde edilir:

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad [29]$$

2 x 2'lik determinantların girdileri, A'nın determinantında, çarpıldığı girdinin minörü olarak tanımlanır. 3 x 3'lük determinant için benzer denklemler, diğer satır veya sütunlardaki girdilerin minörünün alınmasıyla elde edilebilir. Böylece, eğer ilk denklemi ele alırsak:

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ve bunu düzenlersek, böylece ilk sütundaki her bir girdiyi çıkarmış olduk:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{13} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) \\ &\quad + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Benzer biçimde, determinantı, herhangi bir satır veya sütunun minörüne bağlı olarak yazabiliriz:

Her bir girdinin minörü, bir + veya - işaretine sahiptir, işaret girdinin yerine bağlıdır. Bir 3 x 3'lük determinant için, işaretler aşağıdaki tablodan seçilebilir:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

İşaretiyle birlikte yazılan bir minör *kofaktör* olarak tanımlanır. Böylece, determinant, bir satırın veya sütunun girdilerinin, kofaktörle çarpımlarının toplamına eşittir. Determinantı bu tarz bir toplam olarak ifade eden bu prosedür bir satırın veya sütunun kofaktör açılımı olarak tanımlanır.

Determinantların özellikleri

Determinantları belirlemede, işlem sadeleştirmede kullanılan determinant özellikleri aşağıdadır:

1 *Satırları birbiriyle değiştirmek*

İki satırı değiştirmek, determinantın işaretini değiştirir,yani:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \quad [30]$$

$$ad - bc = -(bc - ad)$$

2 *Sütunları birbiriyle değiştirmek*

İki sütunu değiştirmek, determinantın işaretini değiştirir,yani:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \quad [31]$$

$$ad - bc = -(bc - ad)$$

3 *Satırları sütunlarla değiştirmek*

Satır ve sütunları değiştirmek determinantın değerini etkilemez, yani:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \quad [32]$$

$$ad - bc = ad - bc$$

4 *Bir satırın veya sütunun bir sabitle çarpımı*

Bir satırı, bir k sabitiyle çarpmak, determinantı, k ile çarpmak demektir, yani:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \quad [33]$$

$$kad - kbc = k(bc - ad)$$

5 *Satır veya sütunların toplamı veya çıkarması*

Bir satır veya sütunu veya birden fazla satırı veya sütunu, toplamak veya birbirinden çıkarmak, determinantın değerini değiştirmez, yani:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Eğer üçüncü satırın k ile çarpılmış halini ikinci satıra eklersek, aşağıdaki determinanti elde ederiz:

$$\det \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kc_1 & b_2 + kc_2 & b_3 + kc_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Bunun hesaplanması sonucu, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$a_1b_2c_3 + ka_1c_2c_3 + a_2b_3c_1 + ka_2c_3c_1 + a_3b_1c_2 + ka_3c_1c_2 \\ - c_1b_2a_3 - kc_1c_2a_3 - c_2b_3a_1 - kc_2c_3a_1 - c_3b_1a_2 - kc_3c_1a_2$$

İçinde k bulunmayan terimlerin toplamı, determinant $\mathbf{A}$ 'yı verir. k içeren terimler aşağıdaki gibidir:

$$ka_1c_2c_3 + ka_2c_3c_1 + ka_3c_1c_2 - kc_1c_2a_3 - kc_2c_3a_1 - kc_3c_1a_2$$

Fakat bunlar sıfır değerine sahiptir. dolayısıyla $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$ 'dir.

6 Eşit satır veya sütunlar

İki eşit satır veya sütuna sahip determinantların değeri sıfırdır. Örnek olarak, eğer aşağıdaki determinanta sahipsek:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ve birinci satırı ikinci satırdan çıkarırsak:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ve bu nedenle determinant sıfır değerine sahiptir.

7 Bir satır veya sütun bir başka satır veya sütunun katı ise

Bir satır veya sütun bir diğerinin katı ise, determinant sıfır değerine sahiptir. bunun sebebi, eğer çarpanı determinant dışına alırsak, iki eşit satır veya sütun elde ederiz ve dolayısıyla, 6'ncı maddede olduğu gibi determinant sıfır değerine sahiptir.

Kofaktörler ve bitişik matrisler

Aşağıdaki gibi, üç değişkenli, üç eş zamanlı denklem düşünün:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3 \end{aligned} \quad [34]$$

Katsayı matrisi, aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad [35]$$

Matrisi, birinci satırın kofaktör açılımı olarak ifade edersek, aşağıdaki determinant elde edilir:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad [36]$$

a_{11} 'in kofaktörünü A_{11} 'le gösterirsek, a_{12} 'in kofaktörünü A_{12} 'le gösterirsek ve a_{13} 'in kofaktörünü A_{13} 'le gösterirsek, denklem [36]'yı aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad [37]$$

Determinantı, ikinci satırın kofaktör açılımı olarak, aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \quad [38]$$

Benzer biçimde, determinantı, üçüncü satırın kofaktör açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \quad [39]$$

Denklem [37], [38] ve [39]'u, bir kofaktör matrisi olarak, aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad [40]$$

Eğer satır ve sütunları değiştirirsek, *komşu* veya *bitişik* matris olarak adlandırılan bir matrise sahip oluruz (bu satır ve sütun yer değiştirme işlemi *transpoz* olarak adlandırılır). Böylece:

$$adj A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \quad [41]$$

Matris **A** ile *adjoint(komşu)* 'inin çarpımı, aşağıdaki matrisi verir:

$$A(adj A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Eğer çarpımı bir **B** matrisi olarak alırsak,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ b_{12} &= a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} \\ b_{13} &= a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ b_{21} &= a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} \\ b_{22} &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ b_{23} &= a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ b_{31} &= a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} \\ b_{32} &= a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} \\ b_{33} &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{aligned}$$

b_{11} , b_{22} ve b_{33} girdileri **A**'nın girdileri ile aynı girdilerin kofaktörlerinin çarpımıdır ve bu nedenle denklem [37]'de verilen denklem formlarına sahip olan bu girdilerin her biri **A**'nın determinantına eşittir. Diğer b terimleri ile katsayılar ve kofaktörleri **A**'nın farklı satırlarından gelir. Bundan dolayı, hepsi de sıfır değerine sahiptir. Bunu örneklemek için, b_{21} 'i düşünün:

$$\begin{aligned} b_{21} &= a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} \\ &= a_{21}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{22}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ &\quad + a_{23}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{23}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Böylece, bir matris ile *adjoint(bitişik)* 'inin çarpımı için aşağıdaki matrisi yazabiliriz:

$$A(adj A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix}$$

$$= \det A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla:

$$A(adj A) = (\det A)I$$

Fakat $AA^{-1} = I$ olduğundan, ters matris A^{-1} , aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$A^{-1} = \frac{adj A}{\det A} \quad [42]$$

Eğer $\det A = 0$ ise, matrisin tersi yoktur.

Durum denklemleri ve transfer fonksiyonu arasındaki ilişkiler

Aşağıdaki durum denklemlerini düşünün:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad [43]$$

ve:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad [44]$$

Denklem [43]'ün Laplace dönüşümü alınır, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

Bu da aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$

ve bu bir matris denklemi olduğundan ve aynı boyuttaki matrisleri toplayıp çıkarabileceğimizden dolayı, birim matrisini, I birim matris olmak üzere, aşağıdaki denklemi elde edecek biçimde kullanırız:

$$[sI - A]X(s) = BU(s) \quad [45]$$

Denklem [44]'ün Laplace dönüşümünü alırsak, aşağıdaki denklemi verir:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad [46]$$

Denklem [45]'i kullanarak, $X(s)$ 'i denklem [46]'da yerine koyarsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$Y(s) = C[sI - A]^{-1}BU(s) + DU(s)$$

ve bu nedenle transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\text{transfer fonksiyonu} = \frac{Y(s)}{U(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D \quad [47]$$

Bir örnek olarak, Figür 13.1’de tanımlanan ve denklem [5]’te verilen, yay-amortisör-kütle sistemini düşünün:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad [48]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix} \quad [49]$$

$$C = [1 \ 0] \quad [50]$$

$$D = 0 \quad [51]$$

Böylece:

$$\begin{aligned} [sI - A] &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{c}{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve bu nedenle:

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{s(s + c/m) + k/m} \begin{bmatrix} s + \frac{c}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \quad [52]$$

Denklem [47], böylece, aşağıdaki denklemi verir:

$$\begin{aligned} \text{transfer fonksiyonu} &= C[sI - A]^{-1}B \\ &= \frac{1}{s(s + c/m) + k/m} [1 \ 0] \begin{bmatrix} s + \frac{c}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{bmatrix} \quad [53] \\ &= \frac{1/m}{s(s + c/m) + k/m} \end{aligned}$$

Durum denklemlerinin çözümü

Aşağıdaki durum denklemine sahip olduğumuzu düşünün:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad [54]$$

Bu denklemin başlangıç koşulları sıfır olmak üzere, Laplace dönüşümü alınırsa, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= x(0) + BU(s) \end{aligned}$$

ve böylece:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad [55]$$

Denklem [55]'i, $(sI - A)^{-1}$ yerine $\Phi(s)$ yazarak sadeleştirebiliriz.

$$X(s) = \Phi(s)x(0) + \Phi(s)BU(s) \quad [56]$$

Denklem [56], zaman bölgesine alındığında, $\Phi(t)$, *durum geçiş matrisi* olarak tanımlanır.

Girdi $u(t)$ sıfırlandığı zaman, denklem [54]'ün çözümünü düşünün, yani zorlayıcı bir fonksiyon olmadığı sürece:

$$X(s) = \Phi(s)x(0) \quad [57]$$

ve böylece:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) \quad [58]$$

Çözüm, denklem [54]'te yer alan homojen denklem versiyonunu sağlıyor, yani:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad [59]$$

$t = 0$ anındaki başlangıç koşullarıyla, denklem [39]'ün çözümü, aşağıdaki gibidir:

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad [60]$$

Böylece:

$$\Phi(t) = e^{At} \quad [61]$$

Şimdi de zorlayıcı bir fonksiyon olduğunda denklem [56]'nın çözümünü düşünün. Denklemin Laplace dönüşümü, aşağıdaki denklemi verir:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[sI - A]^{-1}\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{[sI - A]^{-1}Bu(t)\} \quad [62]$$

Birinci terimin ters dönüşümü, denklem [58]'de verilmiştir. İkinci terimin çözümü, $u(t)$ 'nin belirsiz bir fonksiyon olduğu bilgisiyle, genel bir durum için tamamlanmalıdır. İkinci terimde, iki dönüşümün çarpımı vardır ve böylece, genel çözümü elde etmek için konvolüsyon integralini kullanmalıyız. Böylece:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau-\tau) \eta d\tau \quad [63]$$

$$= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\Phi(t-\tau-\tau) \eta d\tau \quad [64]$$

Çözümlü örnek

Aşağıdaki durum denkleminde sahip bir sistem düşünün:

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} u(t) \quad [65]$$

ve bu sistemin bir birim adım girdisine maruz kaldığını düşünün. Sonuç olarak, aşağıdaki matrisi elde ederiz:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin tersi, aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} [sI - A]^{-1} &= \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aşağıdaki başlangıç değeriyle:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

denklem [60]'ın homojen kısmı için, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$X_1(s)$ ve $X_2(s)$ her birisi için denklemleri yazarsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$X_1(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)}$$

veya kısmi kesirler kullanılarak:

$$X_1(s) = -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1}$$

ve:

$$X_2(s) = \frac{-2}{(s+2)(s+1)}$$

veya kısmi kesirler kullanılarak:

$$X_2(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

Dolayısıyla, bunların tersini alırsak, çözümlerin homojen kısımlarını aşağıdaki gibi verir:

$$x_1(t) = -e^{-2t} + 2e^{-t}$$

$$x_2(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-t}$$

Çözümün zorlayıcı kısmı, denklem [55]'in ilgili kısmıyla, $X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}U(s)$ olarak verilir. Böylece, bir birim adım girdisi için $U(s) = 1/s$ olduğundan:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

$X_1(s)$ ve $X_2(s)$ her birisi için denklemleri yazarsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$X_1(s) = \frac{s+3}{s(s+2)(s+1)}$$

veya kısmi kesirler kullanılarak:

$$X_1(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{s+1}$$

ve:

$$X_2(s) = \frac{s}{s(s+2)(s+1)}$$

veya kısmi kesirler kullanılarak:

$$X_2(s) = -\frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

Dolayısıyla, bunların tersini alırsak, çözümlerin zorlayıcı kısımlarını aşağıdaki gibi verir:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t}$$

$$x_2(t) = -e^{-2t} + e^{-t}$$

Böylece, toplam çözümler aşağıdaki gibidir:

$$x_1(t) = -e^{-2t} + 2e^{-t} + \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t} + \frac{1}{2}u(t)$$

$$x_2(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-t} - e^{-2t} + e^{-t}$$

$$= e^{-2t} - e^{-t}$$

Karakteristik denklem

Aşağıdaki çıktı denklemini düşünün (denklem [46]'da olduğu gibi):

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad [66]$$

Girdi denklemi [43] kullanılarak, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad [67]$$

$[sI - A]X(s) = BU(s)$ yazabiliriz (denklem [45]) ve böylece:

$$Y(s) = C[sI - A]^{-1}BU(s) + DU(s)$$

ve bu nedenle:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D \quad [68]$$

Bu denklem [42] kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= C \frac{\text{adj}[sI - A]}{|sI - A|} B + D \\ &= \frac{C\{\text{adj}[sI - A]\}B + |sI - A| D}{|sI - A|} \end{aligned} \quad [69]$$

İfadenin paydası $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ 'dır ve matris $\mathbf{A}$ 'nın *karakteristik polinomu* olarak tanımlanır. Matris $\mathbf{A}$ 'nın karakteristik denklemi, aşağıdaki gibidir:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad [70]$$

karakteristik denklemin kökleri, matris $\mathbf{A}$ 'nın *özdeğeri* veya transfer fonksiyonunun *kutupları* olarak tanımlanır.

Durum diyagramları

Durum diyagramları, durum değişken modelinin Laplace dönüşümüyle verilen cebirsel ilişkilerin grafiksel bir şekilde gösterimidir. Böylece, eğer, $dx_1/dt = x_2$ ise x_1 , x_2 'nin zamana göre integralidir. Bu denklemin Laplace dönüşümü alınır, $sX_1(s) - x_1(0) = X_2(s)$ denklemi elde edilir ve böylece:

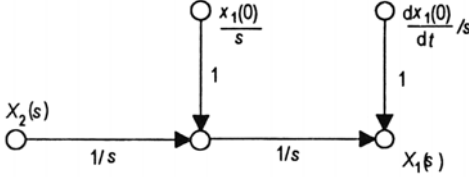
$$X_1(s) = \frac{1}{s}X_2(s) + \frac{1}{s}x_1(0) \quad [71]$$

Böylece, bir integral alma, $1/s$ 'le çarpmak ve başlangıç değeri terimini eklemek demektir. $d^2x_1/dt^2 = x_2$ ise, x_1 , x_2 'nin zamana göre iki defa integral alınmış halidir. Bu denklemin Laplace dönüşümü alınır, $s^2X_1(s) - sx_1(0) - dx_1(0)/dt = X_2(s)$ denklemi elde edilir ve böylece:

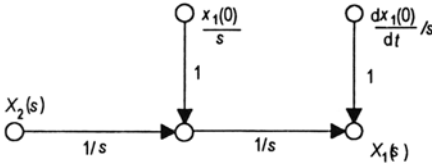
$$X_1(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{1}{s}X_2(s) + x_1(0) \right] + \frac{1}{s^2} \frac{dx_1(0)}{dt} \quad [72]$$

Böylece, birinci integralin sonucu (denklemler[71]) bir defa daha $1/s$ ile bölünür ve bir başka başlangıç değeri terimi eklenir.

Bir integrasyon, Şekil 12.4'te gösterildiği gibi, bir sinyal akış grafiğiyle ifade edilebilir, bu, integratörün çıktısının, $1/s$ ile girdinin çarpımının başlangıç değeri $x_1(s)/s$ ile toplamına eşit olduğunu gösteriyor. Eğer bir daha integral alınır, Sonuç Şekil 12.5'te gösterildiği gibidir.



Şekil 12.4 Denklem [71]'in grafiksel gösterimi



Şekil 12.5 Denklem [72]'in grafiksel gösterimi

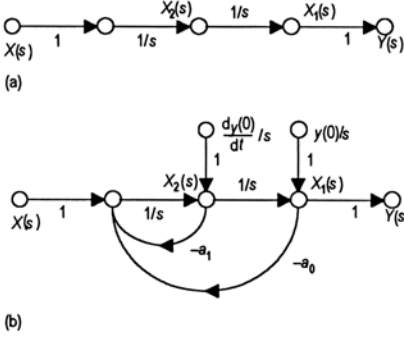
Aşağıdaki diferansiyel denklemle ifade edilen bir sistem düşünün:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t) \quad [73]$$

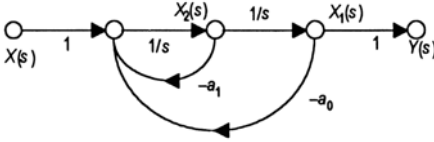
Denklem, ikinci derecedir ve bu nedenle iki tane integratör ve iki tane durum değişkeni olacaktır. İntegratörlerin çıktılarını, durum değişkenleri x_1 ve x_2 olarak tanımlayacağız. Böylece, sistemin sinyal akış grafiğinin bu kısmını Şekil 12.6(a)'da gösterildiği gibi çizebiliriz. Daha sonra katsayıları ve başlangıç değerlerini Figür 12.6(b)'de gösterildiği gibi ekleyebiliriz.

Bir girdi ve çıktı arasındaki transfer fonksiyonu, bütün diğer girdi ve başlangıç durumları sıfıra ayarlanarak, Mason'un genel kazanç formülü (2.Bölüm'de, denklem [86]'ya bakınız,) kullanımıyla, durum sinyal akış grafiğinden elde edilebilir. Örnek olarak, şekil 12.6(b)'deki sinyal akış grafiğinde, başlangıç durumları sıfıra ayarlanırsa, şekil 12.7'de gösterilen grafik elde edilir. Daha sonra kazanç formülü uygulanırsa:

- 1 Girdi ve çıktı düğümleri arasındaki ileri yol $1/s^2$ kazancına sahiptir. Sadece bir tane ileri yol vardır.



Şekil 12.6 Denklem [73]’in grafiksel gösterimi



Şekil 12.7 Başlangıç değerleri sıfırlanmış olarak şekik 12.6(b)

- 2 $\Delta = 1 - (\text{bütün döngü kazançlarının toplamı}) + (\text{birbirine değmeyen bütün döngü çiftlerinin kazanç çarpımlarının toplamı}) - (\text{birbirine değmeyen bütün üçlü döngü kombinasyonlarının kazanç çarpımlarının toplamı}) + (\text{birbirine değmeyen bütün dördü döngü kombinasyonlarının kazanç çarpımlarının toplamı}) - \text{v.b.}$ Böylece $\Delta = 1 - (-a_1/s - a_0/s^2) + 0$ ’dır.
- 3 Birbirine değmeyen döngüler bulunmadığından, $\Delta_k = 1$ ’dir.
- 4 Böylece kazanç, yani transfer fonksiyonu, aşağıdaki gibidir:

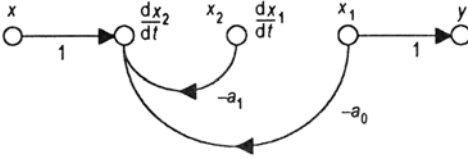
$$(1/s^2)/(1 + a_1/s + a_0/s^2) = 1/(s^2 + a_1s + a_0)$$

Sinyal akış değişkenlerinin, çıktı düğümleri olarak alınarak durum denklemlerinin elde edildiğini düşünün.

O halde, durum denklemleri, Laplace operatör s 'yi veya başlangıç durumlarını içermediğinden, bütün başlangıç durumlarını ve integratör dallarını sileriz. Böylece, şekil 12.6, Şekil 12.8'de gösterilen forma dönüşür. Durum değişkenleri ve girdileri, girdi değişkenleri olarak ve durum değişkenlerinin türevini ifade eden düğümleri çıktı düğümleri olarak aldık. Böylece, aşağıdaki denklemleri elde etmeliyiz:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad [74]$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + x \quad [75]$$



Şekil 12.8 Başlangıç değerleri ve integratör kolu çıkarılmış durum sinyali akış grafiği

Aşağıdaki, üçüncü-derece transfer fonksiyonunu ve aşağıdaki sistemi ifade eden bir sinyal akış grafiğini düşünün:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \quad [76]$$

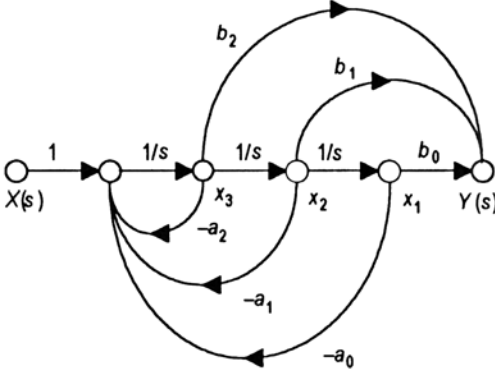
Eğer bütün terimler, en yüksek dereceli s terimine bölünürse, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{a_2}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s^3}}{1 + \frac{b_2}{s} + \frac{b_1}{s^2} + \frac{b_0}{s}} \quad [77]$$

Bütün geri besleme döngü ve ileri yolları, geri besleme döngülerine değen bir sistemde, Mason'un kazanç formülü (denklem [86]'ya bakınız, 3. bölüm) aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$G(s) = \frac{\text{ileri yol faktörlerinin toplamı}}{1 - \text{geri besleme döngüsü faktörleri}} [78]$$

Denklem [77]'deki pay, böylece, ileri-yol faktörlerini ifade eder. İleri yollar, bütün döngülere değmelidir. Denklem [77]'deki payda, geri besleme faktörlerini ifade eder. Böylece denklemi ifade etmek için kullanılan bir sinyal akış grafiği, Şekil 12.9'da gösterildiği gibi olacaktır.



Şekil 12.9 Denklem [77] 'yi ifade eden durum sinyali akış grafiği